مفهوم الدالة ومنحناها

استخدمت الدوال منذ القدم ولكنها لم تدرس كمفهوم رياضي إلا حديثا.
ومن تطبيقاتها: الدوال العددية المشهورة التي تدخل في كثير من القوانين التجريبية، وكذلك الدوال الخاصة بالبرمجة في الحاسوب.

١. تعريف الدالة:

تعريف١: تكون علاقة f من مجموعة X إلى مجموعة Y دالة إذا كان كل عنصر من X في علاقة مع عنصر واحد على الأكثر من Y ، أي أنه من أجل أي عنصرين x_1 و x_2 من X هما في علاقة مع عنصرين من Y يكون:

$$x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

حيث أن $f(x)$ يمثل العنصر الذي هو في علاقة مع x .

نسمي المجموعة X مجموعة المنطلق والمجموعة Y مجموعة الوصول والعنصر $y = f(x)$ صورة x بواسطة الدالة f والعنصر x أصل $y = f(x)$ بواسطة الدالة f ونقول أن $f(x)$ غير معرفة في Y إذا كان x ليس في علاقة مع أي عنصر من Y أي أن $f(x)$ غير موجود في Y .

نرمز لهذه الدالة بالرمز: $f : X \to Y$

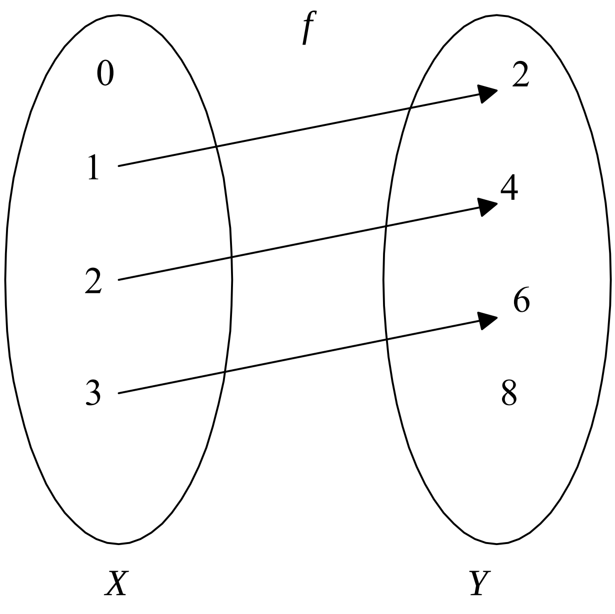
تجدر الإشارة إلى أن كل عنصر من مجموعة المنطلق له صورة واحدة على الأكثر، بينما قد يكون هناك عنصر من مجموعة الوصول له عدة أصول.

مثال١: لتكن لدينا المجموعتان التاليتان:
$X = \{0,1,2,3\}$ و $Y = \{2,4,6,8\}$ والعلاقة f من X إلى Y بحيث:

$$f(1) = 2,\ f(2) = 4,\ f(3) = 6$$

العلاقة f دالة لأن كل عنصر من X في علاقة مع عنصر واحد على الأكثر من Y .

يمكن تمثيل هذه الدالة بالمخطط السهمي التالي:



كما يمكن تعريف هذه الدالة كالتالي:

$f : X \to Y$ حيث: $f(x) = 2x$

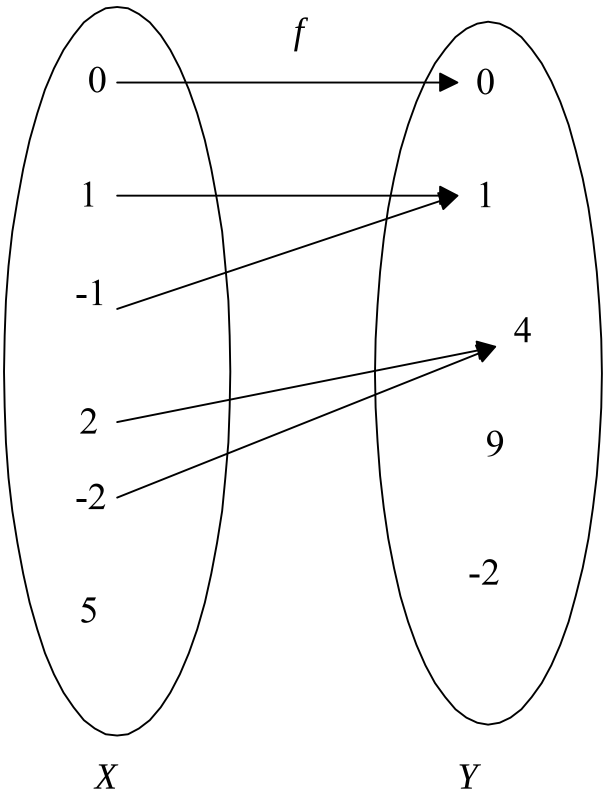
مثال۲: لتكن لدينا المجموعتان التاليتان: $X=\{0,1,-1,2,-2,5\}$ و $Y=\{0,1,4,9,-2\}$ والعلاقة f من X إلى Y بحيث:

$$f(0)=0,\ f(1)=f(-1)=1,\ f(2)=f(-2)=4$$

العلاقة f دالة لأن كل عنصر من X في علاقة مع عنصر واحد على الأكثر من Y :

العناصر 0 و 1 و -1 و 2 و -2 في علاقة مع عنصر واحد فقط من Y بينما العنصر 5 ليس في علاقة مع أي عنصر من Y أي أن $f(5)$ غير معرفة في Y .

يمكن تمثيل هذه الدالة بالمخطط السهمي التالي:



كما يمكن تعريف هذه الدالة كالتالي:

$$f: X \to Y$$

حيث: $f(x)=x^2$

ويمكن في هذه الحالة أن نبين بأن f هي دالة باستخدام العلاقة الموجودة في التعريف ۱:

$$x_1 = x_2 \Rightarrow (x_1)^2 = (x_2)^2 \Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$$

مثال۳: لتكن لدينا المجموعتان التاليتان: *Cities* وهي مجموعة مدن العالم، و *Countries* وهي مجموعة بلدان العالم والعلاقة f من *Cities* إلى *Countries* بحيث: x هو عاصمة $f(x)$.

العلاقة f دالة لأن كل عنصر x من *Cities* وهو مدينة من المدن في علاقة مع عنصر واحد على الأكثر من *Countries*

إذا كان x عاصمة من العواصم فهو في علاقة مع بلده الموافق، وإذا كان x ليس عاصمة فهو ليس في علاقة مع أي عنصر من *Countries* . مثلا:

$$f(Riyadh)=Saudi\ Arabia$$
$$f(Algiers)=Algeria$$
$$f(Cairo)=Egypt$$
$$f(London)=United\ Kingdom$$

بينما $f(Abha)$ ليست معرفة في *Countries* لأن *Abha* ليست عاصمة دولة.

مثـــال٤: لـتكن لـدينا المجموعتـان السـابقتان: $Cities$ و $Countries$ والعلاقـة g مـن $Cities$ إلى $Countries$ بحيث: $g(x)$ هو البلد الذي توجد فيه المدينة x .

العلاقة g دالة لأن كل عنصر x من $Cities$ وهو مدينة من المدن في علاقة مع عنصر واحد على الأكثر من $Countries$. مثلا:

$$g(Riyadh) = Saudi\ Arabia$$
$$g(Algiers) = Algeria$$
$$g(Cairo) = Egypt$$
$$g(London) = United\ Kingdom$$
$$g(Abha) = Saudi\ Arabia$$

مثـــال٥: لـتكن لـدينا المجموعتـان السـابقتان $Countries$ و والعلاقـة f مـن $Countries$ إلى $Cities$ بحيث: $f(x)$ هو مدينة من البلد x .

هذه العلاقة ليست دالة لأنه مثلا: البلد $Saudi\ Arabia$ في علاقة مع أكثر من مدينة.واحدة.

تعريف٢: مجال الدالة f (أو مجموعة تعريفها) هو مجموعة العناصر الموجودة في مجموعة المنطلق والتي لها صورة بواسطة الدالة، ومدى الدالة f هو مجموعة العناصر الموجودة في مجموعة الوصول والتي لها أصول بواسطة الدالة.

يرمز لمجال الدالة f بالرمز D_f ولمداها بالرمز R_f .

مثال٦: حدد مجال الدوال المعرفة في الأمثلة ١ إلى ٤ ومداها.

الحل:

$$1)\ D_f = \{1,2,3\}, \qquad R_f = \{2,4,6\}$$
$$2)\ D_f = \{0,1,-1,2,-2\}, \qquad R_f = \{0,1,4\}$$

٣) لو نعتبر مجموعة العواصم $Capitals$ فيكون:

$$D_f = Capitals \qquad R_f = Countries$$
$$4)\ D_g = Cities \qquad R_g = Countries$$

مثال٧: لتكن لدينا مجموعة الأعداد الطبيعية N والعلاقة f من N إلى N بحيث: $f(x) = 2x$.

١) بين أن f دالة. ٢) حدد مجال f ومداها. ٣) احسب $f(5)$ و $f(14)$.

الحل:

١) f دالة لأن:

$$x_1 = x_2 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

٢) كل عدد طبيعي له صورة بواسطة f إذن: $D_f = \mathrm{N}$

بينما الأعداد الزوجية فقط هي التي لها أصول في N : $R_f = \{2,4,6,8,10,\cdots\}$

٣) $f(5) = 2\times 5 = 10$ و $f(14) = 2\times 14 = 28$.

مثال ٨: لتكن لدينا مجموعة الأعداد الحقيقية R والعلاقة g من R إلى R بحيث: $f(x) = 2x$.

١) بين بأن g دالة. ٢) حدد مجال g ومداها. ٣) احسب $g(2.5)$ و $g(5)$.

الحل:

١) g دالة لأن:

$$x_1 = x_2 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow g(x_1) = g(x_2)$$

٢) كل عدد حقيقي له صورة بواسطة g إذن: $D_g = \mathrm{R}$

وكذلك كل الأعداد الحقيقية لها أصول في R إذن: $R_g = \mathrm{R}$ لأن: $y = 2\times\frac{y}{2} = 2\left(\frac{y}{2}\right) = g\left(\frac{y}{2}\right)$

مثلا: $3 = g(1.5)$ و $0.6 = g(0.3)$.

٣) $g(2.5) = 2\times 2.5 = 5$ و $g(5) = 2\times 5 = 10$.

تعريف ٣: تكون دالتان f و g متساويتين إذا تحقق ما يلي:

1) $D_f = D_g$

2) $x \in D_f \Rightarrow f(x) = g(x)$

نرمز لذلك بالرمز: $f = g$.

مثال ٩: هل الدالتان f و g المعرفتان في المثالين ٣ و ٤ على الترتيب متساويتان؟

الحل:

باستخدام نتائج الفقرتين ٣ و ٤ من المثال ٦ فإن: $f \neq g$ لأن مجاليهما غير متساويين:

$$D_f = Capitals \neq D_g = Cities$$

مثال ١٠: هل الدالتان f و g المعرفتان في المثالين ٧ و ٨ على الترتيب متساويتان؟

الحل:

باستخدام نتائج المثالين ٧ و ٨ فإن: $f \neq g$ لأن مجاليهما غير متساويين:

$$D_f = \mathrm{N} \neq D_g = \mathrm{R}$$

مثال ١١: لتكن لدينا الدالة التالية:

$$g: \mathrm{N} \to \mathrm{N}$$

حيث: $g(x)=x^2$

ونعتبر الدالة f المعرفة في المثال ٧. هل $f=g$ ؟

الحل:

رغم أن الشرط الأول للتساوي (تعريف ٣) متحقق وهو: $D_f=\mathrm{N}=D_g$

لاكن الشرط الثاني غير متحقق: مثلا $3\in D_f=\mathrm{N}$ لكن $f(3)=2\times 3=6\neq g(3)=3^2=9$

ومنه فإن: $f\neq g$.

٢. الدوال العددية:

تعريف ٤: الدوال العددية هي الدوال التي تكون مجموعة وصولها مجموعة عددية.

مثال ١٢: كل الدوال التالية هي دوال عددية.

$$
\begin{aligned}
&1)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=x+1\\
&2)\ f:\mathrm{N}\to\mathrm{N},\ f(x)=x+1\\
&3)\ f:\mathrm{N}\to\mathrm{N},\ f(x)=\sqrt{x}\\
&4)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=\sqrt{x}
\end{aligned}
$$

تعريف ٥: نقول عن دالة إنها:

١) فردية إذا كان: $f(-x)=-f(x)$ أو $f(-x)+f(x)=0$ من أجل أي $x\in D_f$ و $-x\in D_f$.

٢) زوجية إذا كان: $f(-x)=f(x)$ أو $f(-x)-f(x)=0$ من أجل أي $x\in D_f$ و $-x\in D_f$.

مثال ١٣: هل الدوال المعرفة في المثال السابق فردية أم زوجية أم غير ذلك؟

الحل:

1) الدالة $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $f(x)=x+1$ ليست فردية ولا زوجية لأن:

$$f(-x)+f(x)=(-x)+1+x+1=2\neq 0$$

$$f(-x)-f(x)=(-x)+1-(x+1)=-x+1-x-1=-2x\neq 0$$

الدالة $g:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $g(x)=x^2$ زوجية لأن:

$$g(-x)-g(x)=(-x)^2-x^2=x^2-x^2=0$$

2) الدالة $f:\mathrm{N}\to\mathrm{N}$ حيث $f(x)=x+1$ ليست فردية ولا زوجية لأنه إذا كان $x\in D_f=\mathrm{N}$ فإن $-x\notin D_f$.

الدالة $g:\mathrm{N}\to\mathrm{N}$ حيث $g(x)=x^2$ ليست فردية ولا زوجية لسبب مماثل للسبب السابق.