الدوال الأسية واللوغاريتمية

يبدو أن محمد الخوارزمي هو أول من استخدم اللوغاريتمات ووضع لها جداول في بداية القرن الثالث الهجري (بداية القرن التاسع الميلادي)، رغم أن البعض يعتبرون الأسكتلندي *John Napier* هو الأول وذلك في سنة ١٦١٤م. وقد يعود أصل كلمة لوغاريتم إلى تغيير وقع في ترجمة اسم الخوارزمي إلى اللاتينية.

وتستخدم الدوال الأسية واللوغاريتمية في كثير من القوانين التجريبية، كما تستخدم اللوغاريتمات خاصة لتمثيل كميات كبيرة جدا.

١. الأسس:

تعريف١: ليكن لدينا عدد حقيقي x وعدد طبيعي n فيكون x أس n هو:

$$x^n = x \times x \times \cdots \times x \quad \text{مرة } n$$

بينما: $x^0 = 1$

مثال١: احسب كلا مما يلي:

$$1)\ 3^2 \qquad 2)\ (-2)^4 \qquad 3)\ (-3)^3$$

الحل:

$$1)\ 3^2 = 3 \times 3 = 9$$
$$2)\ (-2)^4 = -2 \times -2 \times -2 \times -2 = 16$$
$$3)\ (-3)^3 = -3 \times -3 \times -3 = -27$$

تعريف٢: ليكن لدينا عدد حقيقي $x \neq 0$ وعدد طبيعي n فيكون x أس $-n$ هو:

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

مثال٢: احسب كلا مما يلي:

$$1)\ 3^{-2} \qquad 2)\ (-2)^{-4} \qquad 3)\ (-3)^{-3}$$

الحل:

$$1)\ 3^{-2}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$$

$$2)\ (-2)^{-4}=\frac{1}{(-2)^4}=\frac{1}{16}$$

$$3)\ (-3)^{-3}=\frac{1}{(-3)^3}=\frac{1}{-27}=-\frac{1}{27}$$

تعريف٣: ليكن لدينا عددان حقيقيان x و y وعدد طبيعي n بحيث: $y=x^n$ فإن الجذر من الدرجة n للعدد y أو أس y $\frac{1}{n}$ هو كما يلي:

إذا كان n فرديا فإنه: $y^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{y}=x$

وإذا كان n زوجيا فإنه: $y^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{y}=|x|$

أي أن الجذر هو العملية العكسية للرفع إلى أس طبيعي.

يسمى الجذر من الدرجة ٢ بالجذر التربيعي ويرمز له بالرمز $\sqrt{\ }$ ، بينما يسمى الجذر من الدرجة ٣ بالجذر التكعيبي.

تجدر الإشارة إلى أنه لا يمكن حساب جذر من درجة زوجية للأعداد السالبة باستخدام الأعداد الحقيقية.

مثال٣: احسب كلا مما يلي:

$$1)\ 8^{\frac{1}{3}} \qquad 2)\ (-27)^{\frac{1}{3}} \qquad 3)\ 16^{\frac{1}{4}}$$

الحل:

$$1)\ 8^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{8}=2$$

$$2)\ (-27)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{-27}=-3$$

$$3)\ 16^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{16}=2$$

تعريف٤: ليكن لدينا عدد حقيقي x وعدد كسري $\frac{p}{q}$ حيث q موجب فيكون x أس $\frac{p}{q}$ هو:

$$x^{\frac{p}{q}}=\left(\sqrt[q]{x}\right)^p$$

مثال٤: احسب كلا مما يلي:

$$1)\ (-27)^{\frac{2}{3}} \qquad 2)\ 16^{-\frac{5}{4}} \qquad 3)\ 25^{\frac{3}{2}}$$

الحل:

$$1)\ (-27)^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{-27}\right)^2 = (-3)^2 = 9$$

$$2)\ 16^{-\frac{5}{4}} = \frac{1}{16^{\frac{5}{4}}} = \frac{1}{\left(\sqrt[4]{16}\right)^5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$$

$$3)\ 25^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{25}\right)^3 = 5^3 = 125$$

نظرية١: كل عدد حقيقي يمكن تقريبه بعدد كسري.

مثال٥: قرّب كلا مما يلي بأعداد كسرية:

$$1)\ \sqrt{2} \qquad 2)\ \pi \qquad 3)\ \pi^2$$

الحل:

$$1)\ \sqrt{2} \cong 1.4142 = \frac{14142}{10000}$$

$$2)\ \pi \cong 3.1416 = \frac{31416}{10000}$$

$$3)\ -\pi^2 \cong -9.8696 = -\frac{98696}{10000}$$

تعريف٥: ليكن لدينا عدد حقيقي x وعدد حقيقي α بحيث العدد الكسري التقريبي له هو $\frac{p}{q}$ و q موجب فيكون x أس α هو:

$$x^{\alpha} \cong x^{\frac{p}{q}}$$

تجدر الإشارة إلى أنه لا يمكن حساب الرفع إلى أس عدد حقيقي غير كسري أو عدد كسري مقامه عدد زوجي للأعداد السالبة باستخدام الأعداد الحقيقية.

مثال٦: احسب كلا مما يلي:

$$1)\ 3^{\sqrt{2}} \qquad 2)\ 2^{\pi}$$

الحل:

$$1)\ 3^{\sqrt{2}} \cong 3^{1.14142} \cong 4.728$$

$$2)\ 2^{\pi} \cong 2^{3.1416} \cong 8.825$$

نظرية ٢: ليكن لدينا أربعة أعداد حقيقية x و y و α و β فإن:

$$1)\ \left(x^{\alpha}\right)^{\beta} = x^{\alpha\beta}$$

$$2)\ (x\,y)^{\alpha} = x^{\alpha}y^{\alpha}$$

$$3)\ x^{\alpha}x^{\beta} = x^{\alpha+\beta}$$

$$4)\ \frac{x^{\alpha}}{x^{\beta}} = x^{\alpha-\beta}$$

مثال ٧: بسّط كلا مما يلي:

$$1)\ \frac{10x^3y^2}{5x\,y^4} \qquad 2)\ \left(\frac{3x}{2y}\right)^2\left(\frac{5x^3}{y^4}\right)\left(\frac{4y^3}{15x^4}\right) \qquad 3)\ \frac{x^6y^{-2}z^{-1}}{x^5y^{-3}z^2} \qquad 4)\ \left(\frac{\sqrt[3]{xy^3}}{\sqrt[4]{-x^2y}}\right)^6$$

الحل:

$$1)\ \frac{10x^3y^2}{5x\,y^4} = \frac{10}{5}\frac{x^3}{x}\frac{y^2}{y^4} = 2x^{3-1}y^{2-4} = 2x^2y^{-2} = \frac{2x^2}{y^2}$$

$$2)\ \left(\frac{3x}{2y}\right)^2\left(\frac{5x^3}{y^4}\right)\left(\frac{4y^3}{15x^4}\right) = \frac{3^2x^2}{2^2y^2}\frac{5x^3}{y^4}\frac{2^2y^3}{3\times5x^4} = \frac{3^2\times5\times2^2x^5y^3}{2^2\times3\times5x^4y^6} = 3x\,y^{-3} = \frac{3x}{y^3}$$

$$3)\ \frac{x^6y^{-2}z^{-1}}{x^5y^{-3}z^2} = x^{6-5}y^{-2-(-3)}z^{-1-2} = x\,y\,z^{-3} = \frac{x\,y}{z^3}$$

$$4)\ \left(\frac{\sqrt[3]{xy^3}}{\sqrt[4]{-x^2y}}\right)^6 = \left(\frac{\left(xy^3\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(-x^2y\right)^{\frac{1}{4}}}\right)^6 = \frac{\left(xy^3\right)^{\frac{6}{3}}}{\left(-x^2y\right)^{\frac{6}{4}}} = \frac{\left(xy^3\right)^2}{\left(-x^2y\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x^2y^6}{x^{\frac{6}{2}}(-y)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x^2(-y)^6}{x^{\frac{6}{2}}(-y)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= x^{2-3}(-y)^{6-\frac{3}{2}} = x^{-1}(-y)^{\frac{9}{2}} = \frac{\left(\sqrt{-y}\right)^9}{x}$$

تجدر الإشارة إلى أننا وضعنا $-y$ تحت الجذر لأنه موجب وهذا يستنتج من $\sqrt[4]{-x^2y}$ فلابد أن يكون ما تحت جذر من درجة زوجية موجبا لكن x^2 موجب إذن $-y$ موجب أيضا.

٢. الدوال الأسية:

تعريف ٦: ليكن لدينا عدد حقيقي موجب $b \neq 1$ ومتغير حقيقي x فإن الدالة الأسية ذات الأساس b هي على الشكل التالي: $y = f(x) = b^x$

مثال ٨: حدد أساس كل من الدوال الأسية التالية:

$$1)\ y = f(x) = 2^{-x} \qquad 2)\ y = f(x) = \pi^x \qquad 3)\ y = f(x) = 2^{\frac{x}{2}}$$

الحل:

١) الأساس هو $\frac{1}{2}$ لأن: $y = f(x) = 2^{-x} = \frac{1}{2^x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

٢) الأساس هو π .

٣) الأساس هو $\sqrt{2}$ لأن: $y = f(x) = 2^{\frac{x}{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^x$

نظرية ٣: ليكن لدينا المتغيران الحقيقيان u و v والعدد الحقيقي الموجب $b \neq 1$ فإن:

$$1)\ b^u > 0$$
$$2)\ b^u b^v = b^{u+v}$$
$$3)\ \frac{b^u}{b^v} = b^{u-v}$$
$$4)\ \left(b^u\right)^v = b^{uv}$$

مثال ٩: بسّط كلا مما يلي:

$$1)\ \left(2^x 2^3\right)^{\frac{1}{4}} \qquad 2)\ \frac{5^{-x+2}25^x}{125^{3+x}} \qquad 3)\ \left(\sqrt[x]{9}\,3^2\right)^x$$

الحل:

$$1)\ \left(2^x 2^3\right)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{x}{4}} 2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{8}\left(\sqrt[4]{2}\right)^x$$

$$2)\ \frac{5^{-x+2}25^x}{125^{3+x}} = \frac{5^{-x+2}\left(5^2\right)^x}{\left(5^3\right)^{3+x}} = \frac{5^{-x+2}5^{2x}}{5^{9+3x}} = \frac{5^{x+2}}{5^{9+3x}} = 5^{-2x-7} = \frac{1}{5^{2x+7}} = \frac{1}{5^7 5^{2x}}$$

$$= \frac{1}{5^7}\frac{1}{5^{2x}} = \frac{1}{5^7}\left(\frac{1}{5^2}\right)^x = \frac{1}{78125}\left(\frac{1}{25}\right)^x$$

$$3)\ \left(\sqrt[x]{9}\,3^2\right)^x = \left((9)^{\frac{1}{x}}\,9\right)^x = 9\left(9^x\right)$$