٣. الدوال اللوغاريتمية:

تعريف ٧: ليكن لدينا عدد حقيقي موجب $b \neq 1$ ومتغير حقيقي موجب x فإن الدالة اللوغاريتمية ذات الأساس b هي على الشكل التالي: $y = f(x) = \log_b x$ بحيث: $x = b^y$.

أي أن الدالة اللوغاريتمية هي الدالة العكسية للدالة الأسية ($\log_b b^x = x$ و $b^{\log_b x} = x$)

نظرية ٤: ليكن لدينا العددان الحقيقيان u و v والعدد الحقيقي الموجب $b \neq 1$ فإن:

$$1)\ y = \log_b u \Rightarrow u > 0$$

$$2)\ \log_b (u\,v) = \log_b |u| + \log_b |v|$$

$$3)\ \log_b \left(\frac{u}{v}\right) = \log_b |u| - \log_b |v|$$

$$4)\ \log_b \left(u^v\right) = v \log_b |u|$$

$$5)\ \log_b 1 = 0$$

$$6)\ \log_b b = 1$$

مثال ١٠: اكتب كلا مما يلي باستخدام لوغاريتم واحد:

$$1)\ \log_3 (x+3) + 2\log_3 10 - \log_3 x \qquad 2)\ -\log_2 6 + \log_2 (3x-2) + \log_2 (3-2x)$$

الحل:

$$1)\ \log_3 (x+3) + 2\log_3 10 - \log_3 x = \log_3 (x+3) + \log_3 10^2 - \log_3 x = \log_3 \left(\frac{(x+3)\times 10^2}{x}\right)$$

$$= \log_3 \left(\frac{100(x+3)}{x}\right)$$

$$2)\ -\log_2 6 + \log_2 (3x-2) + \log_2 (3-2x) = \log_2 \left(\frac{(3x-2)(3-2x)}{6}\right)$$

حالات خاصة:

تعريف ٨: اللوغاريتم العشري هو اللوغاريتم ذات الأساس ١٠.

يرمز له بالرمز: $\log x$

مثال ١١: احسب كلا مما يلي:

$$1)\ \log 100 + \log 0.001 - \log 1000 \qquad 2)\ -\log 0.1 - \log 0.01 + \log 1000$$

الحل:

$$1)\ \log 100 + \log 0.001 - \log 1000 = \log 10^2 + \log 10^{-3} - \log 10^3 = 2 - 3 - 3 = -4$$

$$2)\ -\log 0.1 - \log 0.01 + \log 1000 = -\log 10^{-1} - \log 10^{-2} + \log 10^3 = -(-1) - (-2) + 3 = 6$$

تعريف ٩: اللوغاريتم الطبيعي (أو النيبيري) هو اللوغاريتم ذات الأساس e حيث:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cong 2.71828$$

يرمز له بالرمز: $\ln x$

و كانت هناك جداول لحساب اللوغاريتمات الطبيعية ولكن يمكن استخدام الآلة الحاسبة أيضا.

مثال ١٢: باستخدام الآلة الحاسبة، قرّب كلا مما يلي:

$$1)\ \ln 10 \qquad 2)\ \ln 3.15 \qquad 3)\ \ln\sqrt{2}$$

الحل:

$$1)\ \ln 10 \cong 2.3026$$
$$2)\ \ln 3.15 \cong 1.1474$$
$$3)\ \ln\sqrt{2} \cong 0.3466$$

نظرية ٥: ليكن لدينا عدد حقيقي موجب $b \neq 1$ ومتغير حقيقي موجب x فإن:

$$1)\ b^x = e^{x\ln b}$$
$$2)\ \log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$$

ومن فوائد هذه النظرية أنها تسمح لنا بالانتقال من أي أساس إلى الأساس الطبيعي سواء بالنسبة للدوال الأسية أو الدوال اللوغاريتمية.

مثال ١٣: احسب كلا مما يلي:

$$1)\ \log_2 10 \qquad 2)\ \log_5\sqrt{2} \qquad 3)\ \log_{\sqrt{2}} 5$$

الحل:

$$1)\ \log_2 10 = \frac{\ln 10}{\ln 2} \cong \frac{2.3026}{0.6931} = 3.322$$
$$2)\ \log_5\sqrt{2} = \frac{\ln\sqrt{2}}{\ln 5} \cong \frac{0.3466}{1.6094} = 0.215$$
$$3)\ \log_{\sqrt{2}} 5 = \frac{\ln 5}{\ln\sqrt{2}} \cong \frac{1.6094}{0.3466} = 4.643$$

٤. المعادلات الأسية واللوغاريتمية :

نظرية ٦ : ليكن لدينا العددان الحقيقيان u و v فإن:

$$\ln u = \ln v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u > 0 \\ v > 0 \end{cases}$$

ومن فوائد هذه النظرية أنها تسمح لنا بحل المعادلات الأسية وكذا المعادلات اللوغاريتمية بعد تغيير أساس اللوغاريتمات إلى الأساس الطبيعي إن احتيج لذلك.

مثال ١٤: حل المعادلات التالية:

$$1)\ 5^{3x-2} = 4 \qquad 2)\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+1} = 9^{2x-3} \qquad 3)\left(\frac{4}{5}\right)^{x^2+2x-1} = \frac{25}{16}$$

الحل:

$$1)\ 5^{3x-2} = 4 \Leftrightarrow \ln 5^{3x-2} = \ln 4 \Leftrightarrow (3x-2)\ln 5 = \ln 4 \Leftrightarrow 3x - 2 = \frac{\ln 4}{\ln 5}$$

$$\Leftrightarrow 3x = \frac{\ln 4}{\ln 5} + 2 \Leftrightarrow x = \frac{\frac{\ln 4}{\ln 5} + 2}{3} \cong 0.954$$

$$2)\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+1} = 9^{2x-3} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+1} = \ln 9^{2x-3} \Leftrightarrow (3x+1)\ln\frac{1}{2} = (2x-3)\ln 9$$

$$\Leftrightarrow 3x\ln\frac{1}{2} + \ln\frac{1}{2} = 2x\ln 9 - 3\ln 9 \Leftrightarrow 3x\ln\frac{1}{2} - 2x\ln 9 = -3\ln 9 - \ln\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x(3\ln\frac{1}{2} - 2\ln 9) = -3\ln 9 - \ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-3\ln 9 - \ln\frac{1}{2}}{(3\ln\frac{1}{2} - 2\ln 9)} \cong 0.018$$

$$3)\left(\frac{4}{5}\right)^{x^2+2x-1} = \frac{25}{16} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{4}{5}\right)^{x^2+2x-1} = \ln\frac{25}{16} \Leftrightarrow (x^2+2x-1)\ln\frac{4}{5} = \ln\left(\frac{4}{5}\right)^{-2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 = \frac{\ln\left(\frac{4}{5}\right)^{-2}}{\ln\frac{4}{5}} \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 = \frac{-2\ln\frac{4}{5}}{\ln\frac{4}{5}} \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 = -2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

مثال ١٥: حل المعادلات التالية:

$$1)\ \ln x = 2 \qquad 2)\ \ln(3x-5)=5 \qquad 3)\ \ln(x-2)+\ln(x+3)=\ln 2$$

الحل:

$$1)\ \ln x = 2 \Leftrightarrow \ln x = \ln e^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = e^2 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = e^2 \cong 7.389$$

$$2)\ \ln(3x-5)=5 \Leftrightarrow \ln(3x-5) = \ln e^5 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-5 = e^5 \\ 3x-5>0 \end{cases} \Leftrightarrow 3x = e^5+5 \Leftrightarrow x = \frac{e^5+5}{3} \cong 51.138$$

$$3)\ \ln(x-2)+\ln(x+3)=\ln 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x-2)(x+3)=\ln 2 \\ x-2>0 \\ x+3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x+3)=2 \\ x-2>0 \\ x+3>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-6=2 \\ x-2>0 \\ x+3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-6-2=0 \\ x-2>0 \\ x+3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-8=0 \\ x-2>0 \\ x+3>0 \end{cases}$$

نحل المعادلة: $x^2+x-8=0$.

نحسب المميز: $\Delta = b^2-4ac = 1^2-(4\times1\times-8)=33>0$

إذن للمعادلة جذران حقيقيان هما:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{33}}{2\times1} \cong -3.372$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{33}}{2\times1} \cong 2.372$$

نتحقق من شروط المعادلة (المتراجحتان):

بالنسبة للجذر الأول: $x_1-2\le 0$ إذن الجذر مرفوض.

بالنسبة للجذر الثاني: $x_2-2>0$ و $x_2+3>0$ إذن الجذر مقبول..

خلاصة: الحل هو: $x = \frac{-1+\sqrt{33}}{2} \cong 2.372$

مثال ١٦: حل المعادلات التالية:

$$1)\ \log_3 x = 2 \qquad 2)\ \log_6(3x-5)=5 \qquad 3)\ \log_2(x-2)+\log_2(x+3)=1$$

الحل:

$$1)\ \log_3 x = 2 \Leftrightarrow \frac{\ln x}{\ln 3} = 2 \Leftrightarrow \ln x = 2\ln 3 \Leftrightarrow \ln x = \ln 3^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3^2 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 9$$

$$2)\ \log_6(3x-5) = 5 \Leftrightarrow \frac{\ln(3x-5)}{\ln 6} = 5 \Leftrightarrow \ln(3x-5) = 5\ln 6 \Leftrightarrow \ln(3x-5) = \ln 6^5$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-5 = 6^5 \\ 3x-5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3x-5 = 7776 \Leftrightarrow 3x = 7776+5 \Leftrightarrow x = \frac{7781}{3} = 2593.67$$

$$3)\ \log_2(x-2) + \log_2(x+3) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(x-2)(x+3) = 1 \\ x-2 > 0 \\ x+3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\ln(x-2)(x+3)}{\ln 2} = 1 \\ x-2 > 0 \\ x+3 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x-2)(x+3) = \ln 2 \\ x-2 > 0 \\ x+3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x+3) = 2 \\ x-2 > 0 \\ x+3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x+3) = 2 \\ x-2 > 0 \\ x+3 > 0 \end{cases}$$

وقد مرت علينا هذه المعادلة في الفقرة ٣ من المثال ١٥ ، والحل هو: $x = \frac{-1+\sqrt{33}}{2\times 1} \cong 2.372$.

مثال ١٧: حل المعادلات التالية:

$$1)\ x^4 = 2 \qquad 2)\ x^{4.1} = 2 \qquad 3)\ \sqrt[5]{x} = 3x^{-3.5}$$

الحل:

$$1)\ x^4 = 2 \Leftrightarrow \ln x^4 = \ln 2 \Leftrightarrow 4\ln|x| = \ln 2 \Leftrightarrow \ln|x| = \frac{\ln 2}{4} \Leftrightarrow \ln|x| = \ln e^{\frac{\ln 2}{4}} \Leftrightarrow |x| = e^{\frac{\ln 2}{4}}$$

$$\Leftrightarrow |x| = \sqrt[4]{e^{\ln 2}} \Leftrightarrow |x| = \sqrt[4]{2} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[4]{2} \cong \pm 1.189$$

$$2)\ x^{4.1} = 2 \Leftrightarrow \ln x^{4.1} = \ln 2 \Leftrightarrow 4.1\ln x = \ln 2 \Leftrightarrow \ln x = \frac{\ln 2}{4.1} \Leftrightarrow \ln x = \ln e^{\frac{\ln 2}{4.1}} \Leftrightarrow x = e^{\frac{\ln 2}{4.1}}$$

$$\Leftrightarrow x = \left(e^{\ln 2}\right)^{\frac{1}{4.1}} \Leftrightarrow x = 2^{\frac{1}{4.1}} \cong 1.184$$

$$3)\ \sqrt[5]{x} = 3x^{-3.5} \Leftrightarrow x^{\frac{1}{5}} = 3x^{-3.5} \Leftrightarrow x^{0.2}x^{3.5} = 3 \Leftrightarrow x^{3.7} = 3 \Leftrightarrow \ln x^{3.7} = \ln 3 \Leftrightarrow 3.7\ln x = \ln 3$$

$$\Leftrightarrow \ln x = \frac{\ln 3}{3.7} \Leftrightarrow \ln x = \ln e^{\frac{\ln 3}{3.7}} \Leftrightarrow x = e^{\frac{\ln 3}{3.7}} \Leftrightarrow x = \left(e^{\ln 3}\right)^{\frac{1}{3.7}} \Leftrightarrow x = 3^{\frac{1}{3.7}} \cong 1.346$$

تمارين

تمرين ١: بسط كلا مما يلي:

$$1)\ \frac{\sqrt[3]{x^2y^6}}{\sqrt[6]{x^2y^{18}}} \qquad 2)\ \frac{2x^{-5}}{15y^3}\times\frac{3^2x^3y}{10} \qquad 3)\ \left(\frac{-2x^6z}{x^{-2}y^3}\right)^3\left(\frac{y^6}{10x^2y^3z}\right)^2$$

$$4)\ \frac{x^{4.1}y^{3.2}}{z^2}\times\left(\frac{z^{5.3}x^{-2.7}}{y^{4.6}}\right)^{1.7} \qquad 5)\ \frac{\sqrt[4]{x^{2.4}z^{1.2}}}{\sqrt[3]{y^{5.4}x^{1.5}}}\times\frac{\sqrt{y^{4.2}z^{-5}}}{\sqrt[6]{x^{1.8}}}$$

تمرين ٢: بسط كلا مما يلي:

$$1)\ \frac{2^{x+1}}{2^{x-1}} \qquad 2)\ \frac{3^{1-2x}}{6^{x+2}}\times\frac{2^{x+3}}{8} \qquad 3)\ \left(e^{2x}\right)^3\left(1-2e^x\right)^2$$

تمرين ٣: بسط كلا مما يلي:

$$1)\ \log_2(x+1)-\log_2(x^2+2x+1) \qquad 2)\ \ln(x+3)-2\ln(1-x)+4\ln x$$

$$3)\ \log_5 e^{x+1}-\log_3 e^{2-x} \qquad 4)\ \log_9(x^2-1)-\log_3(x+1)$$

تمرين ٤: حل المعادلات التالية:

$$1)\ \sqrt[3]{x^2}=4 \qquad 2)\ x^{-5}=2x^3 \qquad 3)\ -2x^6=x^{-2}$$

تمرين ٥: حل المعادلات التالية:

$$1)\ \sqrt[3]{x^{2.5}}=4 \qquad 2)\ x^{-0.5}=2x^3 \qquad 3)\ -2x^{1.6}=x^{-2}$$

تمرين ٦: حل المعادلات التالية:

$$1)\ 2^x=5^{x+1} \qquad 2)\ \sqrt[x]{3}=3^x \qquad 3)\ \frac{2^{-x+2}}{6^x}=3^{x+1} \qquad 4)\ e^{x+3}=5$$

تمرين ٧: حل المعادلات التالية:

$$1)\ \ln x+\ln(2-x)=0 \qquad 2)\ -\ln(x+3)+\ln(-x+2)=\ln 4 \qquad 3)\ \ln(x+6)=\ln(2x-1)$$

تمرين ٨: حل المعادلات التالية:

$$1)\ \log_2 x+\log_2(2-x)=0 \qquad 2)\ -\log_3(x+5)+\log_3(-x+1)=\log_3 2$$

$$3)\ \log(x-6)=\log(-2x+3) \qquad 4)\ \log x=3 \qquad 5)\ \log_2(x+3)+\log_5(x-2)=0$$