التفاضل ---- الدكتور عبدالستار العسافي

التفاضل

١. تعريف المشتقة

ليكن I مجالا من $\Re$ ، x_0 نقطة من I ، $I \neq \{x_0\}$ و $f : I \to \Re$

نقول عن الدالة f أنها قابلة للاشتقاق عند x_0 إذا وجد عدد حقيقي b بحيث

$$\lim_{x \to x_0, x \neq x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = b$$

و تسمى b مشتقة f عند x_0 و نرمز لها بـ $f'(x_0)$

و نقول عن f أنها قابلة للاشتقاق على مجال I إذا كانت قابلة للاشتقاق عند كل نقطة x_0 من I

وتسمى الدالة

$$f' : I \to \Re$$
$$x \to f'(x)$$

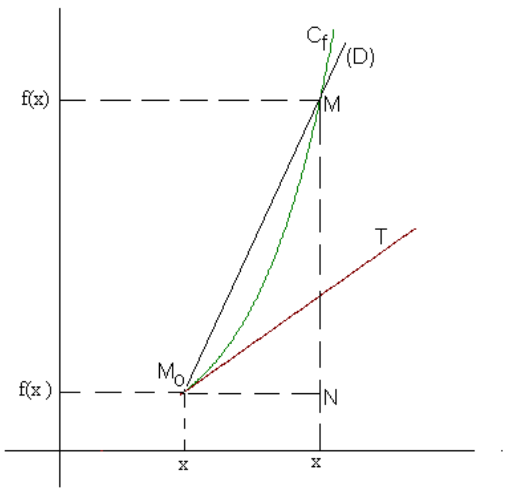
بالمشتقة الأولى للدالة f

ملاحظة١ : f قابلة للاشتقاق عند x_0 إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي b و تابع ε لمتغير حقيقي بحيث من أجل كل $(x_0 + h)$ يكون لدينا

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + bh + h\varepsilon(h), \quad \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$$

ملاحظة٢ : $f'(x_0) \neq (f(x_0))'$

٢. التفسير الهندسي لمفهوم المشتقة



مشتقة f عند x_0 هو ميل المماس للمنحني C_f الممثل لـ f عند النقطة M_0 ذات الإحداثية $(x_0, f(x_0))$

$$(D) \text{ ميل المستقيم } = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\overline{NM}}{\overline{M_0 N}}$$

عندما يؤول x إلى x_0 نلاحظ أن المستقيم (D) يؤول إلى M_0T المماس لـ C_f عند M_0

٣. القوانين العامة للمشتقات

القانون ١: اشتقاق الدوال ذات الأس n

لتكن الدالة: $y = f(x) = x^n$

فإن $y' = nx^{n-1}$

مثال ٧: إذا كانت $y = x^3$

فإن $y' = 3x^{3-1} = 3x^2$

مثال ٨: إذا كانت $y = x^{-4}$

فإن $y' = -4x^{-4-1} = -4x^{-5}$

ومنه فان مشتقة $y = x$ تساوي العدد 1

لأن $y = x \Rightarrow y' = 1x^{1-1} = x^0 = 1$

القانون ٢: مشتق الدالة الثابتة $y = c$ حيث c عدد حقيقي معلوم هو $y' = 0$

مثال ٩: إذا كانت $y = 7$ فإن $y' = 0$ و إذا كانت $y = -5$ فإن $y' = 0$

القانون ٣: مشتق الدالة $y = ax^n$ هو $y' = nax^{n-1}$

مثال ١٠: إذا كانت $y = 3x^6$

فإن $y' = 3 \times 6x^{6-1} = 18x^5$

مثال ١١: أوجد مشتقة الدالة $y = 5\sqrt[3]{x}$

الحل:

لدينا $y = 5\sqrt[3]{x} = 5(x)^{\frac{1}{3}}$

إذاً $y' = \frac{1}{3} \times 5x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{5}{3}x^{\frac{-2}{3}}$

القانون ٤: مشتقة مجموع أو فوارق دوال

لتكن الدالة $F(x)$ تكتب على الشكل $F(x) = f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_{n-1}(x) \pm f_n(x)$ حيث $f_1, \ldots, f_n(x)$ دوال قابلة للاشتقاق فإن $F'(x) = f_1'(x) \pm f_2'(x) \pm \ldots \pm f_{n-1}(x) \pm f_n(x_n)$

مثال ١٢: لتكن الدالة $y = 4x^{-3} - 5x^2 + 7x - 12$

فإن $y' = -3 \times 4x^{-3-1} - 5 \times 2x^{2-1} + 7x^{1-1} = -12x^{-4} - 10x + 7$

القانون ٥ : مشتقة جداء دالتين

لتكن الدالة $F(x)$ تكتب على الشكل $F(x)=f_1(x).f_2(x)$ حيث $f_1(x), f_2(x)$ دالتين قابلتين للاشتقاق على المجال I من $\Re$. فإن $F'(x)=f_1'(x)f_2(x)+f_2'(x)f_1(x)$

مثال ١٣ : لتكن الدالة $F(x)=(3x-2)(4x+1)$

فإن
$$\begin{aligned}F'(x)&=3(4x+1)+4(3x-2)\\&=12x+3+12x-8=24x-5\end{aligned}$$

القانون ٦ : مشتقة قسمة دالتين

لتكن الدالة $F(x)$ تكتب على الشكل $F(x)=\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ حيث $f_1(x), f_2(x)$ قابلتين للاشتقاق على المجال I من $\Re$ و $f_2(x)\neq 0$ على المجال I من $\Re$. فإن

$$F'(x)=\frac{f_1'(x)f_2(x)-f_2'(x)f_1(x)}{\left(f_2(x)\right)^2}$$

مثال ١٤ : أوجد مشتقة الدالة $y=\dfrac{8x^7}{2x-1}$ حيث $x\neq\dfrac{1}{2}$

الحل:

لدينا $f_1(x)=8x^7 \Rightarrow f_1'(x)=7\times 8x^{7-1}=56x^6$ و $f_2(x)=2x-1 \Rightarrow f_2'(x)=2$

إذاً

$$F'(x)=\frac{f_1'(x)f_2(x)-f_2'(x)f_1(x)}{(f_2(x))^2}=\frac{56x^6(2x-1)-2\times 8x^7}{(2x-1)^2}=\frac{56x^6(2x-1)-16x^7}{(2x-1)^2}$$
$$=\frac{112x^7-56x^6-16x^7}{(2x-1)^2}=\frac{96x^7-56x^6}{(2x-1)^2}=\frac{8x^6\left(12x-7\right)}{(2x-1)^2}$$

القانون ٧ : مشتقة الدالة التي تكتب على الشكل $F(x)=(f(x))^n$

إذا كانت $F(x)=(f(x))^n$ حيث $f(x)$ قابلة للاشتقاق فإن

$$F'(x)=n(f(x))^{n-1}f'(x)$$

مثال ١٥ : أوجد مشتقة الدالة $y=F(x)=4(2x^2+3x-2)^2$

الحل:

لدينا $f(x)=(2x^2+3x-2) \Rightarrow f'(x)=4x+3$

إذا $y'=F'(x)=2\times 4(2x^2+3x-2)^{2-1}(4x+3)=8(2x^2+3x-2)(4x+3)$

تمارين

أوجد المشتقة الأولى لما يلي:

$1)\ y=(2x^3-7)(3x^2)$	$6)\ y=\dfrac{(3x-2)(x+7)}{3x-1}$	$11)\ y=\left(\dfrac{\sqrt{2x-7}}{x^2}\right)^{-1}$	$16)\ y=\dfrac{(3-2x)^{\frac{4}{3}}}{x^2}$
$2)\ y=\dfrac{2x^2-5}{3x}$	$7)\ y=\dfrac{3x^2}{(5x+7)(2x-1)}$	$12)\ y=\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)^{3/2}$	$17)\ y=x^3(5x^2+1)^{\frac{-2}{3}}$
$3)\ y=\dfrac{2}{3x^2-7x+4}$	$8)\ y=(2x^4-1.9)^3$	$13)\ y=\sqrt{\dfrac{2x}{x^2+1.8}}$	$18)\ y=2x^{-3}+7x^{-5}$
$4)\ y=\dfrac{5}{4x^3-3x^2}$	$9)\ y=\dfrac{\sqrt{x^3+4}}{x^2(x-2)^3}\ \square$	$14)\ y=x^2\sqrt{x-1}$	$19)\ y=(4x^2\sqrt{x^3})^{1/4}$
$5)\ y=\dfrac{1}{x+2}-x$	$10)\ y=(2x^3-4x+7)^{-2}$	$15)\ y=\dfrac{1.9}{(2x+4)^3}$	$20)\ y=\sqrt{\dfrac{x-2}{x^2+5}}$