

اشتقاق الدوال المثلثية ---- الدكتور عبدالستار العسافي

٤. قواعد اشتقاق الدوال المثلثية:

(١) لتكن الدالة $y = \sin u$ حيث u دالة في x قابلة للاشتقاق على المجال I من \mathbb{R} فإن

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d(\sin u)}{du} \frac{du}{dx} = \cos u \frac{du}{dx}$$

(٢) لتكن الدالة $y = \cos u$ حيث u دالة في x قابلة للاشتقاق على المجال I من \mathbb{R} فإن

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d(\cos u)}{du} \frac{du}{dx} = -\sin u \frac{du}{dx}$$

مثال ١٦: لتكن الدالة $y = \sin(2x^3 - 3)$

$$y' = 3 \times 2x^2 \cos(2x^3 - 3) = 6x^2 \cos(2x^3 - 3) \quad \text{فإن}$$

مثال ١٧: أوجد مشتقة الدالة $y = \cos(2\theta^3 - 3\theta^{-2})$

الحل:

$$u = 2\theta^3 - 3\theta^{-2} \Rightarrow \frac{du}{d\theta} = 6\theta^2 + 6\theta^{-3} \quad \text{لدينا}$$

$$y' = -(6\theta^2 + 6\theta^{-3}) \sin(2\theta^3 - 3\theta^{-2}) \quad \text{إذاً}$$

(٣) لتكن الدالة $y = \tan u$ حيث u دالة في x قابلة للاشتقاق على المجال I من \mathbb{R} فإن

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = \frac{d(\tan u)}{du} \frac{du}{dx} = \sec^2 u \frac{du}{dx}$$

مثال ١٨: إذا كانت $y = \tan x^{-2}$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$

الحل:

$$u = x^{-2} \Rightarrow \frac{du}{dx} = -2x^{-3} \quad \text{لدينا}$$

$$y' = \frac{d(\tan u)}{dx} = \frac{du}{dx} \sec^2 u = -2x^{-3} \sec^2 x^{-2} \quad \text{إذاً}$$

(٤) لتكن الدالة $y = \cot u$ حيث u دالة في x قابلة للاشتقاق على المجال I من \mathbb{R} فإن

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = \frac{d(\cot u)}{du} \frac{du}{dx} = -\csc^2 u \frac{du}{dx}$$

اشتقاق الدوال المثلثية ---- الدكتور عبدالستار العسافي

مثال ١٩: احسب مشتقة الدالة $y = \cot 3x$

الحل:

$$u = 3x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3 \quad \text{لدينا}$$

$$y' = \frac{d(\cot u)}{dx} = -\frac{du}{dx} \csc^2 u = -3 \csc^2 3x \quad \text{ومنه فإن}$$

(٥) لتكن الدالة $y = \sec u$ حيث u دالة في x قابلة للاشتقاق على المجال I من \mathcal{R} فإن

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = \frac{d(\sec u)}{du} \frac{du}{dx} = \frac{du}{dx} \tan u \sec u$$

مثال ٢٠: احسب مشتقة الدالة $y = \sec \theta^2$

الحل:

$$u = \theta^2 \Rightarrow \frac{du}{d\theta} = 2\theta \quad \text{لدينا}$$

$$y' = \frac{d(\sec u)}{d\theta} = \frac{du}{d\theta} \tan u \sec u = 2\theta \tan \theta^2 \sec \theta^2 \quad \text{ومنه}$$

(٦) لتكن الدالة $y = \csc u$ حيث u دالة في x قابلة للاشتقاق على المجال I من \mathcal{R} فإن

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = \frac{d(\csc u)}{du} \frac{du}{dx} = -\frac{du}{dx} \cot u \csc u$$

مثال ٢١: احسب مشتقة الدالة $y = \csc x^3$

الحل:

$$u = x^3 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3x^2 \quad \text{لدينا}$$

$$y' = \frac{d(\csc u)}{dx} = -\frac{du}{dx} \cot u \csc u = -3x^2 \cot x^3 \csc x^3 \quad \text{ومنه}$$

مثال ٢٢: احسب مشتقة الدالة $y = \csc(2x^5 - 3)$

الحل:

$$u = 2x^5 - 3 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 10x^4 \quad \text{لدينا}$$

$$y' = \frac{d(\csc u)}{dx} = -\frac{du}{dx} \cot u \csc u = -10x^4 \cot(2x^5 - 3) \csc(2x^5 - 3)$$

اشتقاق الدوال المثلثية ---- الدكتور عبدالستار العسافي

تمارين: احسب المشتقة الأولى للدوال التالية:

1) $y = \sin^5 3x^2$	5) $y = \csc^3(-7x^4)$	9) $y = \frac{\sin x^2}{\cos^2 x^2}$	13) $y = \sin(\cos 2x)$
2) $y = x \tan \frac{1}{x}$	6) $y = \sqrt{1 + \cos^2 x}$	10) $y = \sec(2x + 1)^{\frac{5}{2}}$	14) $y = \sqrt{1 + \sin x}$
3) $y = \sqrt{x} \cos 2x$	7) $y = \tan^2(x^2 + 1)$	11) $y = \frac{1}{x^2 \sin^3 x}$	15) $y = x \cot(-4x)$
4) $y = \sqrt{\csc x^3}$	8) $y = (x^4 - \cot x)^3$	12) $y = (\sin x - \cos x)^2$	16) $y = x \csc x$