٦ . الاشتقاق الضمني

تعرف الدالة في بعض الحالات بمعادلة من الشكل $f(x,y)=0$ تحتوي المتغير x وقيمة الدالة y

مثال٢٧ :

$$xy=1 \qquad (1)$$

إحدى الطرق لحساب المشتقة الأولى $\frac{dy}{dx}$ هي كتابة المعادلة (1) من الشكل:

$$y=\frac{1}{x} \qquad (2)$$

ومنه يمكن حساب المشتقة كما يلي:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\right]=-\frac{1}{x^2}$$

كما أنه يوجد إمكانية أخرى وذلك باشتقاق طرفي المعادلة (1) قبل كتابة y بدلالة دالة في المتغير x ، باعتبارها دالة قابلة للاشتقاق(وإن كان ليس دائما هو الحال)، ومنه فإن:

$$\frac{d}{dx}(xy)=\frac{d}{dx}(1)\Rightarrow x\frac{d}{dx}(y)+y\frac{d}{dx}(x)=0\Rightarrow x\frac{dy}{dx}+y=0$$

ثم نستخرج $\frac{dy}{dx}$ بدلالة x,y

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$$

نعوض (2) في العبارة الأخيرة فنحصل على:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{x^2}$$

- الطريقة الثانية لحساب المشتقة تسمى بالاشتقاق الضمني وتستعمل في حساب مشتقة دالة معرفة بشكل ضمني بمعادلة من الشكل: $f(x,y)=0$

دون حل هذه المعادلة وذلك باشتقاق طرفي هذه المعادلة ثم نستخرج قيمة المشتقة y' بدلالة x,y

- ويستعمل الاشتقاق الضمني خاصة عندما يصعب أو لا يمكن كتابة y بدلالة المتغير x وعندها نكتفي في حساب المشتقة y' بكتابة عبارتها بدلالة x,y

قاعدة

لتكن المعادلة $f(x,y)=0$ تحتوي المتغير x وقيمة الدالة y فإن اشتقاق y^n بالنسبة لـ x يعطى بما يلي:

$$\frac{d(y^n)}{dx}=ny^{n-1}\frac{dy}{dx}=ny^{n-1}y'$$

إننا اشتققنا y ضمنيا بالنسبة لـ x و ذلك باعتبار y دالة في x معرفة بشكل ضمني بالمعادلة المعطاة

$$f(x,y)=0$$

مثال٢٨: أوجد $\frac{dy}{dx}$ في ما يلي :

$$xy^3-3x^2=xy+5 \qquad (1)$$

الحل:

نشتق طرفي المعادلة (1) فنحصل على:

$$y^3+3xy^2y'-6x=y+xy'$$
$$\Rightarrow 3xy^2y'-xy'=y-y^3+6x$$
$$\Rightarrow y'\left[x(3y^2-1)\right]=y-y^3+6x$$
$$\Rightarrow y'=\frac{y-y^3+6x}{x(3y^2-1)}$$

مثال٢٩: ليكن $x^2-2xy+y^2=0$ أوجد المشتقة الأولى y'

الحل:

نشتق طرفي المعادلة المعطاة فنحصل على:

$$\frac{d}{dx}(x^2-2xy+y^2)=\frac{d}{dx}(0)$$
$$\Rightarrow 2x-2y-2xy'+2yy'=0$$
$$\Rightarrow y'(2y-2x)=2y-2x\Rightarrow y'=\frac{2y-2x}{2y-2x}=1$$

مثال٣٠: استخدم الاشتقاق الضمني لحساب المشتقة الأولى فيما يلي:

$$1)\ 5y^2+\sin y=x^2,\quad 2)\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=1,\quad 3)\,x^2=\frac{x+y}{x-y}\quad 4)x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}-y=1$$

الحل

1) نشتق طرفي المعادلة بالنسبة لـ x فنحصل على

$$\frac{d}{dx}\left[5y^2+\sin y\right]=\frac{d}{dx}\left[x^2\right]\Rightarrow 10yy'+y'\cos y=2x$$

ومنه فإن $(10y+\cos y)y'=2x$

وبالتالي فإنه يمكن كتابة المشتقة الأولى y' بدلالة x,y

$$y'=\frac{2x}{10y+\cos y}$$

وباتباع نفس الخطوات السابقة يكون لدينا ما يلي:

2) $$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right]=\frac{d}{dx}(1)\ \Rightarrow -y^{-2}y'-x^{-2}=0$$

$$\Rightarrow y'=-\frac{x^{-2}}{y^{-2}}=\frac{y^2}{x^2}$$

3) $$\frac{d}{dx}\left[x^2\right]=\frac{d}{dx}\left[\frac{x+y}{x-y}\right]\Rightarrow 2x=\frac{(1+y')(x-y)-(1-y')(x+y)}{(x-y)^2}$$

$$\Rightarrow 2x(x-y)^2=(1+y')(x-y)-(1-y')(x+y)$$

$$\Rightarrow 2x(x-y)^2=y'(x-y+x+y)+x-y-x-y$$

$$\Rightarrow 2x(x-y)^2=y'(2x)-2y$$

$$\Rightarrow y'=\frac{2x(x-y)^2+2y}{2x}\Rightarrow y'=(x-y)^2+\frac{y}{x}$$

$$(4)\ x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}} - y = 1$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y' - y' = 0$$

$$\Rightarrow y'\left(\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}} + 1\right) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow y' = \frac{2}{3}\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{\left(\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}} + 1\right)}$$

يمكن استخدام الاشتقاق الضمني لحساب المشتقة لدوال لم نتطرق إليها من قبل أو يصعب معرفة قانون المشتقة لها كما هو موضح في المثال التالي:.

مثال ٣١: أوجد y' إذا كان $y = x^x$

الحل:

لدينا $y = x^x \Rightarrow \ln y = \ln x^x \Rightarrow \ln y = x\ln x$

نشتق الطرفين فنحصل على:

$$\frac{y'}{y} = \ln x + x\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{y'}{y} = \ln x + 1 \Rightarrow y' = y(\ln x + 1)$$

نعوض قيمة $y = x^x$ إذن يصبح لدينا $y = x^x(\ln x + 1)$

تمارين

تمرين ١: احسب ضمنيا المشتقة الأولى للدوال التالية

$1)\ xy + e^{xy} - y^3\sin x = y^3 + 9x$

$2)\ 3x^2y^2 + 4xy - 2y = 0$

$3)\ x^3y^2 - 5x^2y + x = 13$

$4)\ \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = 1$

$5)\ (x^2 + 3y^2)^3 = x$

$7)\ x^2 = \frac{\cot y}{1 + \csc y}$

$8)\ \tan^3(xy^2 + y) = x$

$9)\ 3x^2 - 4y^2 = 7$

$10)\ y^3\sin x - x^2 = y^3e^{2x}$

$11)\ y + \sin y = x$