٧. المشتقات من الرتبة العليا

تعريف:

تعرف المشتقة من الرتبة n للدالة $f(x)$ على أنها المشتقة الأولى للمشتقة $(n-1)$ للدالة $f(x)$ بشرط أن تكون الدالة قابلة للاشتقاق n من المرات

فمثلا المشتقة السابعة هي المشتقة الأولى للمشتقة السادسة ولذلك لإيجاد المشتقة من الرتبة n نبدأ بالدالة فنحسب المشتقة الأولى ثم الثانية ثم الثالثة....ثم المشتقة من الرتبة $n-1$ ثم المشتقة من الرتبة n

لتكن $y=f(x)$ حيث y دالة في x و لنفرض أن f قابلة لاشتقاق n من المرات على المجال $I \subset \Re$.

فيكون لدينا التعريفات الآتية:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d\left(f(x)\right)}{dx} = f'(x)$$ (المشتقة الأولى لـ y بالنسبة لـ x)

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(f'(x)\right)}{dx} = f''(x)$$ (المشتقة الثانية لـ y بالنسبة لـ x)

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d\left(f''(x)\right)}{dx} = f'''(x)$$ (المشتقة الثالثة لـ y بالنسبة لـ x)

$$y^{(4)} = \frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d\left(f'''(x)\right)}{dx} = f^{(4)}(x)$$ (للمشتقة الرابعة لـ y بالنسبة لـ x)

. . . .

. . . .

. . . .

$$y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d\left(f^{(n-1)}(x)\right)}{dx} = f^{(n)}(x)$$ (للمشتقة n لـ y بالنسبة لـ x)

مثال٣٢ : أوجد المشتقة الثانية للدالة $y=\sin x$

الحل:

$$y' = \frac{d\sin x}{dx} = \cos x$$

$$y'' = \frac{d\cos x}{dx} = -\sin x$$

مثال ٣٣ : أوجد $\frac{d^3y}{dx}$ (المشتقة الثالثة) إذا كانت $y=6x^5$

الحل:

$$y' = \frac{d}{dx}\left(6x^5\right) = 5\times 6x^4 = 30x^4$$

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(30x^4\right) = 4\times 30x^3 = 120x^3$$

$$y''' = \frac{d}{dx}\left(120x^3\right) = 3\times 120x^2 = 360x^2$$

قاعدة: إذا كان y كثيرة حدود من الدرجة n فإن المشتقة من الدرجة $n+1$ تساوي الصفر.

مثال ٣٤: أوجد $y^{(6)}$ للدالة $y = 2x^5 + 3x^3 + 5x - 1$

الحل:

بما أن y كثيرة حدود من الدرجة الخامسة إذن $y^{(6)} = 0$

مثال ٣٥: إذا كانت $y = e^{-x}\ln x$ فأوجد y''

الحل:

$$y' = e^{-x}\frac{d}{dx}\left(\ln x\right) + \ln x\frac{d}{dx}\left(e^{-x}\right) = \frac{e^{-x}}{x} - e^{-x}\ln x = \frac{e^{-x}}{x} - y$$

$$y'' = \frac{-xe^{-x} - e^{-x}}{x^2} - y' = \frac{-xe^{-x} - e^{-x}}{x^2} - \frac{e^{-x}}{x} + e^{-x}\ln x = -e^{-x}\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \ln x\right)$$

مثال٣٦: إذا كانت $y = e^{-x}\ln x^2$ فأوجد y''

الحل: لدينا $y = e^{-x}\ln x^2 = 2e^{-x}\ln x$

ومنه ومن المثال السابق فإن $y'' = -2e^{-x}\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \ln x\right)$

مثال ٣٧: إذا كانت $y = e^{-2x}\sin 3x$ فأوجد y''

الحل:

$$y' = e^{-2x}\frac{d}{dx}\left(\sin 3x\right) + \sin 3x\frac{d}{dx}\left(e^{-2x}\right) = 3e^{-2x}\cos 3x - 2e^{-2x}\sin 3x = 3e^{-2x}\cos 3x - 2y$$

$$\begin{aligned} y'' &= 3e^{-2x}\frac{d}{dx}\left(\cos 3x\right) + 3\cos 3x\frac{d}{dx}\left(e^{-2x}\right) - 2y' \\ &= -9e^{-2x}\sin 3x - 6e^{-2x}\cos 3x - 2\left(3e^{-2x}\cos 3x - 2e^{-2x}\sin 3x\right) \\ &= -e^{-2x}\left(12\cos 3x + 5\sin 3x\right) \end{aligned}$$

تمرين: جسم يتحرك على خط مستقيم بحيث أن المسافة (s) بالقدم feet عند الزمن (t) بالثانية تعطى بالمعادلة $s = t^3 - 2t$

١) أوجد السرعة الآنية عند اللحظة t تساوي ٤ ثواني

٢) أوجد التسارع الآني عند اللحظة t تساوي ٤ ثواني

٣) أوجد الزمن اللازم عندما يكون التسارع يساوي $2\ fet/\sec^2$

الحل

١) السرعة الآنية هي معدل تغير المسافة بالنسبة للزمن

إذن $\frac{ds}{dt}=3t^2-2$ هي السرعة بعد الزمن (t) ثانية أو عند الزمن (t) من بداية الحركة

السرعة بعد 4 ثواني $\frac{ds(4)}{dt}=\left(3t^2-2\right)\big|_{t=4}=3\left(4^2\right)-2=46\ ft/\sec$

٢) العجلة (التسارع) هي معدل تغير السرعة بالنسبة للزمن

إذن $\frac{d^2s}{dt^2}=6t$ العجلة بعد الزمن (t) ثانية أو عند الزمن (t) من بداية الحركة

التسارع بعد 4 ثواني

$$\frac{d^2s}{dt^2}\big|_{t=4}=6t\big|_{t=4}=6\times4=24\ ft/\sec^2$$

٣) الزمن اللازم عندما يكون التسارع يساوي $2\ fet/\sec^2$

$$\frac{d^2s}{dt^2}=6t=2\Rightarrow t=\frac{1}{3}\sec$$

تمارين :

تمرين١: أوجد المشتقة المشار إليها للدوال التالية:

1) $y = 3x^2 - 2x^3;\ \ y''$

2) $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\ ;\ y''$

3) $y = 7 + 6x^2 - 4x^4;\ y'''$

4) $y = 8x^3 - 2x^4;\ y'''$

5) $y = x(x-1)^3; y''$

6) $y = e^{-2x}(\cos 3x - \sin 2x);\ y''$

7) $y = 3x^5 - 10x^3 + 15x\ ;\ \frac{d^6y}{dx^6}$

8) $y = \frac{x}{x-4}\ ;\ \frac{d^2y}{dx^2}$

9) $y = \frac{2x}{x^2+1}\ ; y''$

10) $y = \frac{1}{x-2} + \frac{x}{4};\ \frac{d^3y}{dx^3}$

11) $y = \sqrt{\frac{1}{x^2-1}}; y''$

12) $y = (1+x^2)\ln x\ ; y''$

تمرين٢: احسب المشتقة الثانية للدوال التالية عند النقاط المشار إليها:

1) $f(x) = 8x^{10} + 2x^8 - 4x^5 + 1\ ; x = 1$

2) $f(x) = \sqrt{4 - x + 2x^4}\ ;\ x = 1$

3) $f(x) = \frac{4x^2}{3x-7}\ ;\ x = 2$

4) $f(x) = 2x^2\sqrt{2x^4+3}\ ;\ x = -1$

تمرين٣: تعطى معادلة المسافة $s(km)$ بدلالة الزمن $t(h)$ أوجد السرعة والتسارع عند الزمن المشار إليه

1) $s = (2t^2 - 3)^4\ ; t = 2h$

2) $s = \sqrt{3.4 - t^4}\ ; t = 1h$

3) $s = t^2\sqrt{1+t^2}\ ; t = 1h$

4) $s = \frac{t}{2t^2-3}\ ;\ t = 4h$

5) $s = (2t+7)\sqrt{t^3-1}\ ;\ t = 2h$

6) $s = 1.8t^3 - 2.9t^2 - 1\ ; t = 3h$