# الفصل الأول :التكامل

## ١. الدوال الأصلية والتكامل

**تعريف١:**

يقال إن $F(x)$ دالة أصلية (تكامل) لدالة $f(x)$ إذا تحققت العلاقة التالية :

$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$ أي أن $dF(x) = f(x)dx$ بمعني أن تفاضل $F(x)$ هو $f(x)$

ومن التعريف السابق فإن الدالة $F(x)+c$ حيث $c$ عدد ثابت اختياري، يمكن أن تكون دوال أصلية(تكامل) للدالة $f(x)$ . والسبب يرجع لكون مشتقة العدد الثابت يساوي الصفر

نستنتج أنه إذا وجدت لدالة ما ، دالة أصلية ، فإنه يوجد عدد غير منته من الدوال الأصلية لها تختلف عن بعضها بالعدد الثابت ويكون لدينا التعريف التالي

**تعريف٢:**

تكامل دالة $f(x)$ هو دالة $F(x)+c$ ، حيث $c$ عدد ثابت و :

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

ويرمز لتكامل الدالة $f(x)$ بالرمز

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

ويقرأ بالتكامل غير المحدود لـ $f(x)dx$ ويسمى العدد الثابت $c$ بثابت التكامل.

**مثال١:**

لدينا $d(x^5) = 5x^4dx$ إذن $\int 5x^4dx = x^5 + c$

و $d(e^{3x}) = 3e^{3x}dx$ إذن $\int 3e^{3x}dx = e^{3x} + c$

و $d(\cos x^2) = -2x\sin x^2dx$ إذن $\int -2x\sin x^2dx = \cos x^2 + c$

يعني أن التكامل هو العملية العكسية (للاشتقاق) للتفاضل

## ٢. قوانين التكامل غير المحدود للدوال الجبرية

**القاعدة١:** تكامل العدد الثابت

ليكن $a$ عدداً ثابتاً فإن

$$\int a dx = ax + c$$ حيث $c$ ثابت التكامل

**مثال ٢:**

$$1)\ \int 5dx = 5x + c$$
$$2)\ \int -7dx = -7x + c$$
$$3)\ \int -\frac{5}{3}dx = -\frac{5}{3}x + c$$

**القاعدة٢:**

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$ باستثناء $n = -1$ حيث $c$ ثابت التكامل

**مثال ٣:**

$$1)\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + c = \frac{1}{4}x^4 + c$$
$$2)\int \frac{1}{x^4}dx = \int x^{-4}dx = \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + c = \frac{x^{-3}}{-3} + c = -\frac{1}{3x^3} + c$$
$$3)\int x^{\frac{2}{5}}dx = \frac{x^{\frac{2}{5}+1}}{\frac{2}{5}+1} + c = \frac{x^{\frac{7}{5}}}{\frac{7}{5}} + c = \frac{5}{7}x^{\frac{7}{5}} + c$$

**القاعدة٣:**

يمكن إخراج عامل ثابت من تحت إشارة التكامل أو بالعكس دون أن تتغير النتيجة أي أن:

$$\int af(x)dx = a\int f(x)\,dx$$

وذلك لأن اشتقاق الطرفين يعطي $af(x) = af(x)$

**مثال ٤:**

$$1)\int 7x^4 dx = 7\int x^4 dx = 7\frac{x^{4+1}}{4+1} + c = \frac{7}{5}x^5 + c$$

$$2)\int \frac{-2}{x^3}dx = -2\int \frac{1}{x^3}dx = -2\int x^{-3}dx = -2\frac{x^{-3+1}}{-3+1}+c = -2\frac{x^{-2}}{-2}+c = \frac{1}{x^2}+c$$

$$3)\int \sqrt{5}x^{-\frac{2}{3}}dx = \sqrt{5}\int x^{-\frac{2}{3}}dx = 3\sqrt{5}x^{\frac{1}{3}}+c$$

**القاعدة٤:**

تكامل المجموع الجبري لعدة دوال يساوي المجموع الجبري لتكاملا ت هذه الدوال أي أن :

إذا كانت $f(x), g(x)$ دوال قابلة للتكامل في $x$. فإن

$$\int [f(x)\pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

وبصفة عامة إذا كانت $f_1(x), f_2(x), f_3(x),...., f_n(x)$ دوالاً قابلة للتكامل في $x$. فإن:

$$\int [f_1(x)\pm f_2(x)\pm f_3(x)\pm....\pm f_n(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \pm \int f_3(x)dx \pm....\pm \int f_n(x)dx$$

**مثال٥:** احسب التكاملات التالية:

$$1)\int (x^2-2x+5)dx, \qquad 2)\int \left(\sqrt{x}-\frac{2}{x^3}\right)dx, \qquad 3)\int \left(x^5-\sqrt{2}x-\frac{3}{x^2}\right)dx.$$

الحل :

$$1)\int (x^2-2x+5)dx = \int x^2dx - \int 2xdx + \int 5dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 5x + c = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 5x + c$$

$$2)\int \left(\sqrt{x}-\frac{2}{x^3}\right)dx = \int \sqrt{x}dx - 2\int \frac{1}{x^3}dx$$

$$= \int x^{\frac{1}{2}}dx - 2\int x^{-3}dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{3}{2}} - 2\frac{x^{-3+1}}{-2} + c = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + x^{-2} + c$$

$$3)\int \left(x^5-\sqrt{2}x-\frac{3}{x^2}\right)dx = \int x^5dx - \sqrt{2}\int x\,dx - 3\int x^{-2}dx$$

$$= \frac{1}{6}x^6 - \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 + 3x^{-1} + c$$

**القاعدة٥:**

لتكن $u$ دالة قابلة للاشتقاق في $x$ و $n$ عدد يخالف $-1$ فتكون لدينا القاعدة التالية:

$\int u'u^n\,dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$ باستثناء $n=-1$ حيث $c$ ثابت التكامل

**مثال ٦:** احسب التكاملات التالية:

$$1)\int 6x^2\left(2x^3-6\right)^4 dx,\qquad 2)\int x^3\left(x^4-2\right)^5 dx,\qquad 3)\int \left(x^2+1\right)\sqrt{x^3+3x+1}\,dx$$

الحل:

$$1)\int 6x^2\left(2x^3-6\right)^4 dx:$$

لدينا $u=2x^3-6 \Rightarrow u'=6x^2$ وبالتالي فإن:

$$\int 6x^2\left(2x^3-6\right)^4 dx=\int u'u^4\,dx=\frac{u^5}{5}+c=\frac{\left(2x^3-6\right)^5}{5}+c$$

$$2)\int x^3\left(x^4-2\right)^5 dx:$$

لدينا $u=x^4-2 \Rightarrow u'=4x^3$ ومنه فإن:

$$\int x^3\left(x^4-2\right)^5 dx=\frac{1}{4}\int 4x^3\left(x^4-2\right)^5 dx=\frac{1}{4}\frac{u^6}{6}+c=\frac{1}{24}\left(x^4-2\right)^6+c$$

$$3)\int \left(x^2+1\right)\sqrt{x^3+3x+1}\,dx=\int\left(x^2+1\right)\left(x^3+3x+1\right)^{\frac{1}{2}}dx$$

لدينا $u=x^3+3x+1 \Rightarrow u'=3x^2+3=3\left(x^2+1\right)$ وبالتالي فإن:

$$\int \left(x^2+1\right)\sqrt{x^3+3x+1}\,dx=\frac{1}{3}\int 3\left(x^2+1\right)\left(x^3+3x+1\right)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{3}\int u'u^{\frac{1}{2}}\,dx=\frac{1}{3}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c=\frac{2}{9}u^{\frac{3}{2}}+c=\frac{2}{9}\left(x^3+3x+1\right)^{\frac{3}{2}}+c$$

**القاعدة٦:** إذا كانت $u$ دالة قابلة للاشتقاق في $x$ فيكون لدينا القانون التالي :

$$\int\frac{u'}{u}dx=\ln|u|+c$$

**مثال٧:** احسب التكامل التالي :

$$1)\int\frac{2x^3+1}{x^4+2x+1}dx,\qquad 2)\int\frac{xe^{2x^2}}{e^{2x^2}+5}dx,\qquad 3)\int\frac{\sec^2 x}{5-\tan x}dx,\qquad 4)\int\frac{x+\cos 2x}{x^2+\sin 2x}\,dx$$

الحل :

$$1)\int\frac{2x^3+1}{x^4+2x+1}dx:$$

لدينا $u=x^4+2x+1 \Rightarrow u'=4x^3+2=2(2x^3+1)$ وبالتالي فإن

$$\int \frac{2x^3+1}{x^4+2x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2(2x^3+1)}{x^4+2x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{u'}{u}dx = \frac{1}{2}\ln|u| + c = \frac{1}{2}\ln\left|x^4+2x+1\right| + c$$

$$2)\int \frac{xe^{2x^2}}{e^{2x^2}+5}dx:$$

$$u = e^{2x^2}+5 \Rightarrow u' = 4xe^{2x^2}$$

$$\int \frac{xe^{2x^2}}{e^{2x^2}+5}dx = \frac{1}{4}\int \frac{u'}{u}dx = \frac{1}{4}\ln|u| + c = \frac{1}{4}\ln\left|e^{2x^2}+5\right| + c$$

$$3)\int \frac{\sec^2 x}{5-\tan x}dx:$$

$$u = 5-\tan x \Rightarrow u' = -\sec^2 x$$

$$\int \frac{\sec^2 x}{5-\tan x}dx = -\int \frac{-\sec^2 x}{5-\tan x}dx = -\int \frac{u'}{u}dx = -\ln|u| + c = -\ln|5-\tan x| + c$$

$$4)\int \frac{x+\cos 2x}{x^2+\sin 2x}dx:$$

$$u = x^2+\sin 2x \Rightarrow u' = 2x+2\cos 2x = 2(x+\cos 2x)$$

$$\int \frac{x+\cos 2x}{x^2+\sin 2x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2(x+\cos 2x)}{x^2+\sin 2x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{u'}{u}dx = \frac{1}{2}\ln|u| + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+\sin 2x\right| + c$$

**تمرين تدريبي:** احسب التكاملات التالية:

1) $\int (2\sqrt{x} - 3x^4)dx$

2) $\int \left(\frac{3}{x^4} - 4x^2 + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$

3) $\int \sqrt{x}(x-3)^2 dx$

4) $\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right)dx$

5) $\int 3(3x^2-1)^3 x dx$

6) $\int (x^4+2x)^2(4x^3+2)dx$

7) $\int x\sqrt{x^2+1}\, dx$

8) $\int 5(5x^7+2)^2 x^6 dx$

9) $\int \sqrt{1-4x}dx$

10) $\int \sqrt[3]{5+x^3}(x^2)dx$

11) $\int \frac{(1+3x)dx}{\sqrt{2x+3x^2}}$

12) $\int (3x-x^3)^5(1-x^2)dx$

13) $\int \frac{t^3-4t+3\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt$

14) $\int \frac{\sec x \tan x}{3+2\sec x}dx$

15) $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}dx$