

تكمال الدوال الاسية --- الدكتور عبدالستار العسافي

٤. قواعد تكامل الدوال الأسية

القاعدة ١:

إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق في x و a عدد موجب يخالف 1 ($a \neq 1$) يكون لدينا القانون

التالي :

$$\int u' a^u dx = \frac{a^u}{\ln a} + c$$

مثال ١١: احسب التكامل التالي:

$$1) \int 5^{-3x} dx, \quad 2) \int x 6^{2x^2} dx.$$

الحل:

$$1) \int 5^{-3x} dx = -\frac{1}{3} \int -3(5^{-3x}) dx = -\frac{1}{3} \frac{5^{-3x}}{\ln 5} + c.$$

$$2) \int x 6^{2x^2} dx = \frac{1}{4} \int 4x 6^{2x^2} dx = \frac{1}{4} \frac{6^{2x^2}}{\ln 6} + c$$

القاعدة ٢:

إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق في x فيكون لدينا القانون التالي :

$$\int u' e^u dx = e^u + c.$$

مثال ١٢: احسب التكامل التالي:

$$1) \int (x-1) e^{x^2-2x+1} dx, \quad 2) \int (\cos x - 1) e^{\sin x - x} dx$$

$$3) \int \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 1}} dx, \quad 4) \int x e^{x^2} (e^{x^2} + 1)^7 dx$$

الحل :

$$1) \int (x-1) e^{x^2-2x+1} dx :$$

لدينا $u = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow u' = 2x - 2 = 2(x-1)$ وبالتالي فإن

تكمال الدوال الاسية --- الدكتور عبدالستار العسافي

$$\begin{aligned}\int (x-1) e^{x^2-2x+1} dx &= \frac{1}{2} \int 2(x-1) e^{x^2-2x+1} dx = \frac{1}{2} \int u' e^u dx = \frac{1}{2} e^u + c \\ &= \frac{1}{2} e^{x^2-2x+1} + c \\ 2) \int (\cos x - 1) e^{\sin x - x} dx &:\end{aligned}$$

لدينا $u = \sin x - x \Rightarrow u' = \cos x - 1$ وبالتالي فإن

$$\int (\cos x - 1) e^{\sin x - x} dx = \int u' e^u dx = e^u + c = e^{\sin x - x} + c$$

$$3) \int \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 1}} dx = \int e^x (e^x + 1)^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$u = e^x + 1 \Rightarrow u' = e^x$$

$$\int e^x (e^x + 1)^{-\frac{1}{2}} dx = \int u' u^{-\frac{1}{2}} dx = 2u^{\frac{1}{2}} + c = 2(e^x + 1)^{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{e^x + 1} + c$$

$$4) \int x e^{x^2} (e^{x^2} + 1)^7 dx$$

$$u = e^{x^2} + 1 \Rightarrow u' = 2x e^{x^2}$$

$$\int x e^{x^2} (e^{x^2} + 1)^7 dx = \frac{1}{2} \int u' u^7 dx = \frac{1}{2} \frac{u^8}{8} + c = \frac{1}{16} u^8 + c = \frac{1}{16} (e^{x^2} + 1)^8 + c$$

تمرين تدريبي: احسب التكاملات التالية:

$$1) \int (e^{-x} + \cos 2x + 1) dx$$

$$6) \int e^{1+\cos x} \sin x dx$$

$$11) \int e^{2x} \sec(e^{2x} - 1) dx$$

$$2) \int 2e^{2x+\cos x} (2 - \sin x) dx$$

$$7) \int \frac{e^{5-\frac{2}{x^2}}}{x^3} dx$$

$$12) \int 5e^{2x} e^{1+e^{2x}} dx$$

$$3) \int \sec x \tan x e^{5+2\sec x} dx$$

$$8) \int \frac{e^{3+\ln 2x}}{x} dx$$

$$13) \int \frac{e^{3-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

$$4) \int \frac{e^x}{x^2} dx$$

$$9) \int \frac{e^{1+\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-1}} dx$$

$$14) \int \frac{11^{13+\csc 2x}}{\sin 2x \tan 2x} dx$$

$$5) \int 3^{2x} e^{5-3^{2x}} dx$$

$$10) \int (e^{-x} + e^x)^2 dx$$

$$15) \int 2^{1+\cot 5t} \csc^2 5t dt$$