

٥. التكامل بالتجزئة

مقدمة

لنفرض أننا نريد تكامل

$$\int x \sin x dx \quad \text{أو} \quad \int \sin x e^{-x} dx$$

نلاحظ أننا لا نستطيع تطبيق قوانين التكامل مباشرة ففي مثل هذه الحالات نحاول حلها بالتجزئة وهي تتمثل في تحويل التكامل الذي لا يمكن حسابه مباشرة إلى مجموع جبري لدالة وتكامل يمكن حسابه

١,٥. قانون التكامل بالتجزئة

من قانون مشتق جداء دالتين لدينا $d(uv) = vdu + u dv$

تكامل الطرفين فنحصل على: $uv = \int vdu + \int u dv$

ومنه قانون التكامل بالتجزئة

$$\int u dv = uv - \int v du$$

وبهذه الطريقة نكون قد انتقلنا من حساب التكامل $\int u dv$ إلى حساب التكامل $\int v du$ الذي يكون

عادة أقل صعوبة من الأول إذا أحسنا اختيار u, dv

و طريقة استخدام هذه القاعدة موضحة في الأمثلة الآتية:

مثال ١٣: نفرض أننا نريد حساب $\int x \sin x dx$ لكننا لا يمكننا حسابه مباشرة لأنه لا ينطبق عليه أي من

قوانين التكامل المباشرة ولذلك سنحسب هذا التكامل بطريقة التكامل بالتجزئة

ولنفرض أن

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = \sin x dx \Rightarrow v = -\cos x \quad \text{و}$$

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx$$

$$= -x \cos x + \sin x + c$$

مثال ١٤: احسب ما يلي: $\int x e^x dx$

الحل:

نلاحظ أننا لا نستطيع أن نحلها مباشرة، إذن فنحاول حسابه باستعمال التكامل بالتجزئة.

لنفرض أن:

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

التكامل بالتجزئة --- الدكتور عبدالستار العسافي

$$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \quad \text{و}$$

$$\int u dv = uv - \int v du \quad \text{نطبق القانون:}$$

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx \quad \text{ومنه}$$

$$= x e^x - e^x + c = e^x (x - 1) + c$$

مثال ١٥: أوجد التكامل التالي: $\int \ln x dx$

الحل :

نلاحظ أننا لم نأخذ أي قاعدة تكامل تحسب $\int \ln x dx$

وبالتالي لنحسب التكامل باستعمال التكامل بالتجزئة

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \quad \text{ولنأخذ}$$

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

ولنطبق قانون التكامل بالتجزئة $\int u dv = vu - \int v du$

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx \quad \text{فيكون لدينا}$$

$$= x \ln x - x + c = x(\ln x - 1) + c$$

مثال ١٦: احسب التكاملات التالية :

$$1) \int x^2 \ln x dx, \quad 2) \int x^3 \sin(2x^2) dx, \quad 3) \int x^5 e^{x^3} dx, \quad 4) \int \sin^2 x dx$$

الحل :

$$1) \int x^2 \ln x dx:$$

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \quad \text{نفرض أن}$$

$$dv = x^2 dx \Rightarrow v = \frac{x^3}{3} \quad \text{ولنفرض}$$

وبتطبيق قانون التكامل بالتجزئة فإن

$$\begin{aligned} \int x^2 \ln x dx &= \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \times \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \frac{x^3}{3} + c = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{9} x^3 + c \end{aligned}$$

$$2) \int x^3 \sin(2x^2) dx :$$

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx \quad \text{بفرض أن}$$

$$dv = x \sin(2x^2) dx \Rightarrow v = -\frac{1}{4} \cos(2x^2) \quad \text{وبفرض أن}$$

وبتطبيق قانون التكامل بالتجزئة نحصل على:

$$\int x^3 \sin(2x^2) dx = -\frac{1}{4} x^2 \cos(2x^2) + \frac{1}{2} \int x \cos(2x^2) dx = -\frac{1}{4} x^2 \cos(2x^2) + \frac{1}{8} \sin(2x^2) + c$$

$$3) \int x^5 e^{x^3} dx :$$

$$du = 3x^2 dx, v = \frac{1}{3} e^{-x^3} \quad \text{فإن } u = x^3, dv = x^2 e^{x^3} dx \quad \text{بفرض أن}$$

$$\int x^5 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} x^3 e^{x^3} - \int x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} x^3 e^{x^3} - \frac{1}{3} e^{x^3} + c = \frac{1}{3} (x^3 - 1) e^{x^3} + c \quad \text{إذن:}$$

$$4) \int \sin^2 x dx :$$

$$\int \sin^2 x dx = \int \sin x \sin x dx \quad \text{لدينا}$$

و لنفرض ما يلي :

$$u = \sin x \Rightarrow du = \cos x dx$$

$$dv = \sin x dx \Rightarrow v = -\cos x$$

و بتطبيق قانون التكامل بالتجزئة $\int u dv = vu - \int v du$ يكون لدينا

$$\int \sin^2 x dx = -\sin x \cos x + \int \cos^2 x dx$$

وبما أن

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\int \sin^2 x dx = -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x) dx \quad \text{إذن}$$

$$= -\sin x \cos x + \int dx - \int \sin^2 x dx$$

$$\Rightarrow \int \sin^2 x dx = -\sin x \cos x + x - \int \sin^2 x dx$$

$$\Rightarrow \int \sin^2 x dx + \int \sin^2 x dx = -\sin x \cos x + x + c$$

$$\Rightarrow 2 \int \sin^2 x dx = -\sin x \cos x + x + c$$

التكامل بالتجزئة --- الدكتور عبدالستار العسافي

$$\int \sin^2 x dx = -\frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{1}{2} x + c = -\frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{2} x + c \quad \text{ومنه فإن}$$

تمرين تدريبي: احسب التكاملات التالية:

1) $\int \cos^2 x dx$

4) $\int x\sqrt{x+4} dx$

7) $\int x(x+5)^{-10} dx$

2) $\int \ln(5x+3) dx$

5) $\int xe^{1-3x} dx$

8) $\int x^2 e^x dx$

3) $\int xe^{-3x} dx$

6) $\int x \sec x \tan x dx$

9) $\int x^2 \cos(5x^2) dx$