الفصل الثاني: . التكامل المحدود

١. النظرية الأساسية لحساب التكامل

لتكن الدالة $f(x)$ دالة مستمرة على المجال $[a,b]$ ولتكن $F(x)$ تكاملا غير محدد للدالة $f(x)$ فإن التكامل المحدود يعطى بما يلي:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

مثال ١ : احسب التكامل التالي $\int_1^2 xdx$.

الحل :

$$\int_1^2 xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

مثال ٢ : احسب التكامل التالي $\int_0^3 (x^3 - 4x + 1)dx$.

الحل :

$$\int_0^3 (x^3 - 4x + 1)dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{4x^2}{2} + x\right)\Big|_0^3$$

$$= \left(\frac{3^4}{4} - \frac{4\times 3^2}{2} + 3\right) - (0 - 0 + 0)$$

$$= \frac{81}{4} - 18 + 3 = \frac{81}{4} - 15 = \frac{81-60}{4} = \frac{21}{4} = 5\frac{1}{4}$$

مثال ٣ : احسب التكامل التالي $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta$.

الحل :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta = \sin\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

٢,١. خواص التكاملات المحدودة :

إذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ دالتين متصلتين على فترة التكامل $a \le x \le b$ فإن:

١) $\int_a^a f(x)dx = 0$

٢) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

٣) إذا كانت $a \le c \le b$ فإن $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

مثال ٤ : احسب التكامل التالي $\int_{-1}^{2} |x|$

الحل : لدينا $|x| = \begin{cases} x\ , & \text{إذا كانت} \quad x \ge 0 \\ -x, & \text{إذا كانت} \quad x < 0. \end{cases}$

ومنه فإن

$$\int_{-1}^{2} |x|\,dx = \int_{-1}^{0} -xdx + \int_{0}^{2} xdx. = -\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{2} = 0 + \frac{1}{2} + \frac{4}{2} - 0 = \frac{5}{2}.$$

تمرين: احسب التكاملات المحدودة التالية:

1) $\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx$

2) $\int_0^2 (2-4x)dx$

3) $\int_{-1}^{2} |2x-3|\,dx$

4) $\int_2^3 \frac{x^2-2}{x^2}dx$

5) $\int_{-1}^{1} x^2\sqrt{2-x^3}\,dx$

6) $\int_0^3 f(x)$, حيث $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \le 1 \\ 2, & x > 1 \end{cases}$

7) $\int_{-2}^{2} f(x)dx$, حيث $f(x) = \begin{cases} 3, & x \le 0 \\ x+3, & x > 0 \end{cases}$

8) $\int_1^4 \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx$

9) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1+\cos x)dx$

10) $\int_0^1 \frac{x}{x+1}dx$

11) $\int_{-1}^{2} x\sqrt{9-x^2}\,dx$

12) $\int_0^2 (x^3-1)^{\frac{2}{3}} x^2 dx$