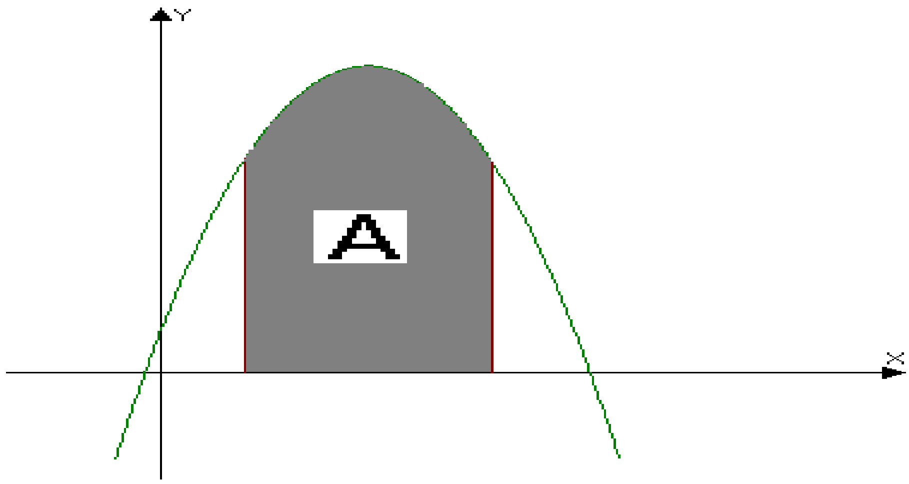
٢. تطبيقات على التكامل المحدود

من المعلوم أن تطبيقات التكامل في شتي التخصصات كثيرة جدا وسنتطرق هنا فقط لتطبيقات التكامل في حساب المساحة

١,٢. قواعد حساب المساحة باستعمال التكامل المحدود

لتكن الدالة $y = f(x)$ متصلة في الفترة $[a\ ,b]$

١) إذا كانت $f(x) \geq 0$ من أجل كل قيم x في الفترة $[a\ ,b]$ فإن المساحة A المحصورة بين منحنى الدالة الواصلة بين النقطتين a, b ومحور السينات تحسب كما يلي :



$$A = \int_a^b f(x)dx.$$

مثال٥: أوجد المساحة المحصورة بين منحنى الدالة $y = x^2$ والمحور السيني والمستقيمين $x = 1$ و $x = 3$.

الحل :

بما أن $f(x) \geq 0$ من أجل كل قيم x فإن المساحة A تعطى بما يلي

$$\textbf{Square units } A = \int_1^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\bigg|_1^3 = \frac{x^3}{3}\bigg|_1^3 = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$$

٢) إذا كانت $f(x) \leq 0$ من أجل كل قيم x في الفترة $[a\ ,b]$ فإن المساحة A المحصورة بين منحنى الدالة الواصلة بين النقطتين a, b ومحور السينات تحسب كما يلي:

$$A = \left|\int_a^b f(x)dx.\right|$$

مثال٦: أوجد المساحة المحصورة بين منحنى الدالة $y = -x^2$ والمحور السيني والمستقيمين $x = -2$ و $x = 2$

الحل :

بما أن $f(x)=-x^2\le 0$ من أجل كل قيم x فإن المساحة A تعطى بما يلي:

$$A=\left|\int_{-2}^{2} f(x)dx\right|=\left|\int_{-2}^{2}-x^2dx\right|=\left|-\frac{x^3}{3}\right|=\left|-\frac{2^3}{3}+\frac{(-2)^3}{3}\right|=\left|-\frac{16}{3}\right|=\frac{16}{3}\ \textbf{Square units}$$

٣) إذا وجد c بين النقطتين a و b أي أن $a<c<b$ حيث أن $f(x)\ge 0$ من أجل كل قيم x في الفترة $[a\ ,c]$ و $f(x)\le 0$ من أجل كل قيم x في الفترة $[c\ ,b]$ فإن المساحة A المحصورة بين منحنى الدالة الواصلة بين النقطتين a,b ومحور السينات تحسب كما يلي:

$$A=\int_{a}^{c} f(x)dx+\left|\int_{c}^{b} f(x)dx\right|$$

٤) وإذا وجد c بين النقطتين a و b أي أن $a<c<b$ حيث أن $f(x)\le 0$ من أجل كل قيم x في الفترة $[a\ ,c]$ و $f(x)\ge 0$ من أجل كل قيم x في الفترة $[c\ ,b]$ فإن المساحة A المحصورة بين منحنى الدالة الواصلة بين النقطتين a,b ومحور السينات تحسب كما يلي :

$$A=\left|\int_{a}^{c} f(x)dx\right|+\int_{c}^{b} f(x)dx$$

مثال ٧: أوجد المساحة المحصورة بين منحنى الدالة $y=x^3$ والمحور السيني والمستقيمين $x=-2$ و $x=2$

الحل :

بما أن $f(x)=x^3\ge 0$ من أجل كل قيم x في الفترة $[0,2]$ و $f(x)=x^3\le 0$ من أجل كل قيم x في الفترة $[-2,0]$ فإن المساحة A تعطى بما يلي

$$A=\left|\int_{-2}^{0} x^3dx\right|+\int_{0}^{2} x^3dx.=\left|\frac{x^4}{4}\right|_{-2}^{0}\right|+\frac{x^4}{4}\Big|_{0}^{2}=\left|-\frac{16}{4}\right|+\frac{16}{4}=4+4=8\ \textbf{Square units}$$

مثال ٨: أوجد المساحة المحصورة بين منحنى الدالة $y=-x^3$ والمحور السيني والمستقيمين $x=-3$ و $x=2$

الحل :

بما أن $f(x)=-x^3\ge 0$ من أجل كل قيم x في الفترة $[-3,0]$ و $f(x)=-x^3\le 0$ من أجل كل قيم x في الفترة $[0,2]$ فإن المساحة A تعطى بما يلي

$$A=\int_{-3}^{0}-x^3dx+\left|\int_{0}^{2}-x^3dx\right|=-\frac{x^4}{4}\Big|_{-3}^{0}+\left|\frac{-x^4}{4}\Big|_{0}^{2}\right|=\frac{81}{4}+\left|-\frac{16}{4}\right|=\frac{81}{4}+\frac{16}{4}=\frac{97}{4}\ \textbf{Square units}$$

مثال ٢٩: أوجد المساحة المحصورة بين المحور السيني ومنحنى الدالة $f(x)=x^2-6x+8$ الواصل بين نقطتي تقاطع المنحنى مع المحور السيني .

الحل :

يتقاطع منحنى الدالة مع المحور السيني إذا كان $f(x)=0$ وبالتالي للإيجاد نقاط التقاطع نضع:

$$x^2-6x+8=0$$

لدينا $x^2-6x+8=0 \Leftrightarrow (x-2)(x-4)=0 \Leftrightarrow x=2$ أو $x=4$

إذن يقطع المنحنى المحور السيني عند $x=2$ و $x=4$ وتكون هاتان القيمتان حدي التكامل

ومن الجدول التالي :

x	$-\infty$	2	4 ∞
$x-2$	-	+	+
$x-4$	-	-	+
$f(x)=(x-2)(x-4)$	+	-	+

يكون لدينا $f(x)\le 0$ من أجل كل قيم x في الفترة $[2,4]$ وبالتالي فإن المساحة A تعطى بما يلي

$$A=\left|\int_2^4\left(x^2-6x+8\right)dx\right|=\left|\left(\frac{x^3}{3}-\frac{6x^2}{2}+8x\right)\Big|_2^4\right|=\left|\left(\frac{4^3}{3}-3(4)^2+8(4)\right)-\left(\frac{2^3}{3}-3(2)^2+8(2)\right)\right|$$

$$=\left|\left(\frac{64}{3}-48+32\right)-\left(\frac{8}{3}-12+16\right)\right|=\left|\frac{64-48}{3}-\frac{8+12}{3}\right|=\left|\frac{16}{3}-\frac{20}{3}\right|=\left|-\frac{4}{3}\right|=\frac{4}{3}\text{Square units}$$

تمارين:

تمرين١: احسب المساحة المحصورة بين المنحنى $y=x^2+1$ ومحور السينات من $x=2$ إلى $x=3$.

تمرين٢: احسب المساحة المحصورة بين المنحنى $y=2x^2$ ومحور السينات من $x=-1$ إلى $x=2$.

تمرين٣: احسب المساحة المحصورة بين المنحنى $y=(x+2)(x^2-2x-3)$ ومحور السينات من $x=-2$ إلى $x=1$.

تمرين٤: احسب المساحة المحصورة بين المنحنى $y=3x$ ومحور السينات من $x=-1$ إلى $x=0$.

تمرين ٥: احسب المساحة المحصورة بين المنحنى $y = 2(x+4)(x^2 - 2x - 3)$ ومحور السينات من $x = -5$ إلى $x = 3$.

تمرين ٦: احسب المساحة المحصورة بين المنحنى $y = \sin x$ ومحور السينات من $x = 0$ إلى. $x = \frac{3\pi}{2}$

تمرين ٧: احسب المساحة المحصورة بين المحور السيني ومنحنى الدالة $y = -2x^2 + 4x + 30$ الواصل بين نقطتي تقاطع المنحنى مع المحور السيني .