وزارة التعليم العالي
والبحث العلمي
جامعة الانبار
كلية العلوم/ قسم الفيزياء

اسم المادة: الليزر/1

المستوى الدراسي: الدراسات الأولية

المرحلة: الثالثة

المحاضرة الثالثة

عنوان المحاضرة: كثافة الطاقة الطيفية لإشعاع الجسم الاسود

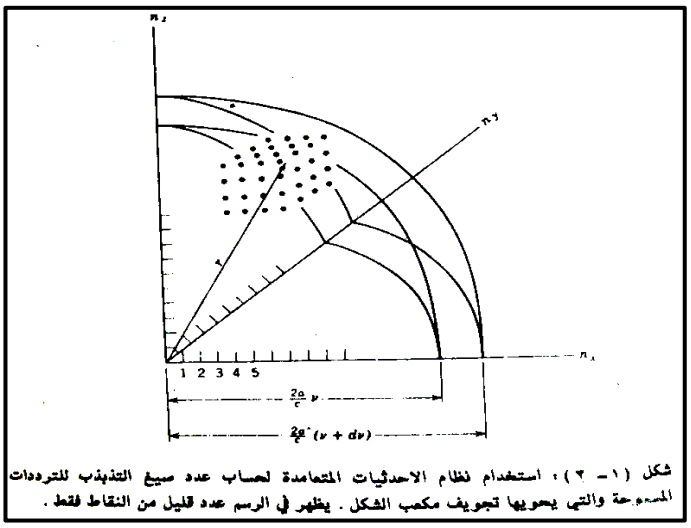
مدرس المادة

أ.م. د جمال مال الله رزيج العبيدي

معادلة القيم المسموحة للتردد والمناظرة للقيم المسموحة لطول الموجة:

$$\boldsymbol{\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{2a}\left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2\right)^{1/2}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\mathbf{1-6})$$

الان نود حساب **عدد مثل هذه الترددات المسموحة، أي عدد صيغ التذبذب لمدى معين من التردد** وليكن مثلا $d\nu$. ان ذلك قد يتم بتشكيل شبيكة مكعبة الشكل منتظمة في نظام احداثيات يمكننا من وصف كل نقطة للشبيكة بمجموعة من الاعداد n_x ، n_y، n_z وكما مبين في الشكل (1-3). بهذا الترتيب تناظر كل نقطة للشبيكة ترددا مسموحا ويكون المقدار $N_\nu d\nu$ مشيرا الى عدد الترددات المسموحة والتي يقع ترددها بين القيمة ν والقيمة $\nu + d\nu$، ويكون مساويا أيضا الى المقدار $N_r dr$ وهو عدد النقاط الواقعة في قشرة كروية نصف قطرها (r) وسمكها (dr) ومن الواضح بان البعد (r) في هذا الترتيب من الاحداثيات يعطى بالعلاقة $r = \left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2\right)^{1/2}$ ، اذ انه يمثل احداثي نصف قطري وباستخدام العلاقة (6-1) ينتج:



شكل (١ - ٣) : استخدام نظام الاحداثيات المتعامدة لحساب عدد صيغ التذبذب للترددات المسموحة والتي يحويها تجويف مكعب الشكل . يظهر في الرسم عدد قليل من النقاط فقط .

$$r = \frac{2a\nu}{c} \qquad or \qquad \nu = \frac{2ar}{c} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1-7)$$

بيد ان المقدار $N_r dr$ يساوي حجم القشرة الكروية مضروبا في الكثافة العددية لنقاط الشبيكة. ولما كانت هذه الكثافة مساوية الى واحد حسب تشكيل الشبيكة، لذا تكون:

$$N_r dr = \frac{1}{8} 4\pi r^2 dr = \pi r^2 \frac{dr}{2}$$

باستخدام المعادلة (1-7) لحساب المقدار $r^2 dr$ ثم تعويضه في المعادلة أعلاه التي بدورها تكون مساوية الى $N_\nu d\nu$ لذا نحصل على العلاقة:

$$N_\nu d\nu = \frac{\pi}{2}\left(\frac{2a}{c}\right)^3 \nu^2 d\nu$$

ونظرا لوجود موجتين مستقلتين تناظران حالتي الاستقطاب الممكنة للإشعاع الكهرومغناطيسي لذا يضاعف الناتج أعلاه عند احتساب عدد الترددات المسموحة الواقعة في مدى التردد المعطى وبهذا تكون:

$$N_\nu dN_\nu = \frac{8\pi a^3 \nu^2 d\nu}{c^3}$$

ان **هذا العدد من صيغ التذبذب كما مر سابقا لا يعتمد على شكل التجويف**، لذا يمكن الاستعاضة عن a^3 بالمقدار (V) الذي هو حجم التجويف، بهذا تصبح العلاقة أعلاه بالشكل الاتي:

$$\boldsymbol{N_\nu dN_\nu = V\,\frac{8\pi\nu^2}{c^3}\,d\nu} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\mathbf{1-8})$$

الان نحسب معدل الطاقة المرافقة لموجة واقفة تتذبذب بصيغة ترددها$(\boldsymbol{\nu})$.

حسب الفيزياء التقليدية، يمكن ان تتخذ طاقة الموجة أية قيمة تتراوح بين الصفر واللانهاية والقيمة الحقيقية تتناسب مع مربع متوسط سعة الموجة، لكن عندما يحوي الجهاز عدد كبير من الموجات الواقفة وهو اشعاع في حالة توازن حراري مع بعضه البعض بدرجة حرارة (T) فان جهازا كهذا وحسب النظرية التقليدية للميكانيك الاحصائي يكون خاضعا لاحتمالية توزيع معين للطاقة تعطي دالة التوزيع لها بدلالة درجة الحرارة كما يعين معدل الطاقة باستخدام احتمالية التوزيع هذه. ان دالة التوزيع هذه تعرف بدالة التوزيع لبولتزمان وتكون الاحتمالية dp لتردد معين لتجويف تقع طاقة الاشعاع فيها بين المقدار E و E+dE على النحو التالي:

$$dp = Ce^{-E/KT}dE$$

C مقدار ثابت و K ثابت بولتزمان. فعند استخدام هذه المعادلة يكون معدل الطاقة $\bar{E}$ لتردد صيغة تذبذب معينه:

$$\bar{E} = \frac{\int_0^\infty E\, e^{-E/KT}dE}{\int_0^\infty e^{-E/KT}dE} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1-9,a)$$

وباستخدام المتسلسلات الرياضية في حل البسط والمقام نحصل على:

$$\bar{E} = KT \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1-9,b)$$

والمعادلة أعلاه تمثل معدل الطاقة لتردد صيغة مفردة لذلك فان معدل الطاقة لعدد $N(\nu)$ من الانماط هو:

$$\bar{E} = N(\nu)\, d\nu\, KT$$

لحساب كثافة الطاقة الطيفية $\rho_\nu(T)$ في مدى محصور بين ν و $\nu + d\nu$ لطيف الاشعاع لجسم اسود ولتجويف بدرجة حرارة (T) هي مجرد حاصل ضرب معدل الطاقة الكلية لجميع الأنماط عند ذلك التردد مقسوما على حجم التجويف أي:

$$\rho_\nu(T)\, d\nu = \frac{N(\nu)\, d\nu}{a^3} KT$$

وباستخدام المعادلة $(8-1)$ نحصل على:

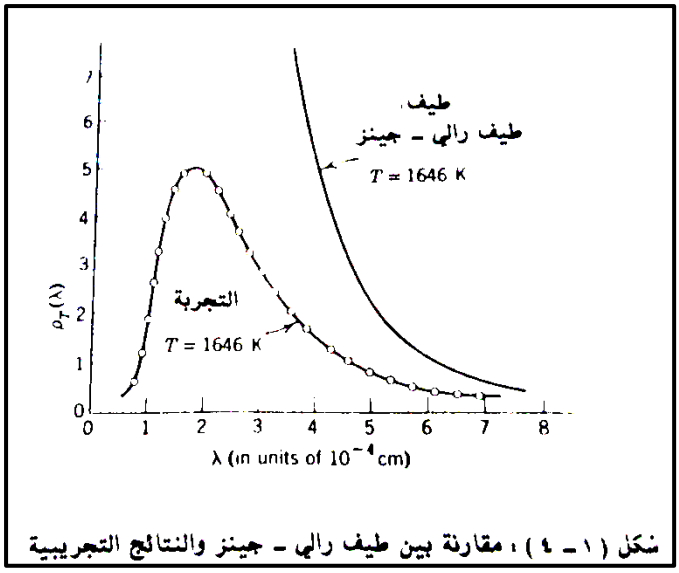
$$\rho_\nu(T)\, d\nu = \frac{8\pi V \nu^2}{a^3 C^3} KT\, d\nu$$

وحيث ان $V = a^3$ لذلك فان المعادلة أعلاه تصبح بالشكل:

$$\boldsymbol{\rho_\nu(T)\, d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{C^3} KT\, d\nu} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\mathbf{1-10})$$

وهي تمثل التوزيع الطيفي لإشعاع جسم اسود حسب حسابات رالي ــ جينز.

في الحقيقة ان المعادلة $(10-1)$ تتناقض بصورة واضحة مع النتائج التجريبية اذ انها تؤدي الى استنتاج غير معقول وهو ان كثافة الطاقة لوحدة الحجم (ρ) المتمثلة بالعلاقة (1-2) تساوي ما لانهاية ويوضح الشكل (1-4) مقارنة بين هذه المعادلة والنتائج التجريبية الا انها تعكس من جانب اخر نتائج تطبيق نصص الفيزياء التقليدية (الكلاسيكية) لمعالجة مثل هذه المسائل التي هي على مقياس الابعاد الذرية.



شكل (١ ـ ٤) : مقارنة بين طيف رالي ـ جينز والنتائج التجريبية

بقيت مسالة التوزيع الطيفي لإشعاع الجسم الأسود غير محلولة حتى بداية هذا القرن حين ادخل بلانك فرضية الضوء الكمي وتنص هذه الفرضية الأساسية على ان طاقة التردد لتجويف اشعاع كهرومغناطيسي لا يمكن ان تأخذ قيم اعتباطية، $(0 \Longleftarrow \infty)$، كما هو مفترض فعلا في المعادلة (9-1) بل ان الطاقة يجب ان تأخذ قيما معينة محددّة ويجب ان تكون هذه القيم مضاعفات عددية لكميه أساسية تتناسب مع تردد صيغة التذبذب للإشعاع. بمعنى اخر، فرض بلانك ان طاقة التذبذب E لصيغة معينة ذي تردد ν يُعبر عنها بالشكل الاتي:

$$E = nh\nu \ ; \ n = 0, 1, 2, ... \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1-11)$$

تمثل h مقدار ثابت يدعى بثابت بلانك. ان في مضمون هذه الفرضية تحديد لكيفية التعامل مع داخل التجويف وجدرانه، أي ان التعامل مع اشعاع الجسم الأسود يتم على أساس التعامل مع دفعات او كمات من الطاقة مقدار كل كم منها يساوي $h\nu$ وهذا الكم يُطلق عليه بالفوتون، وعلى ضوء هذه الفرضية يكون معدل الطاقة لصيغة معينه من التذبذب ذي تردد ν على الشكل الاتي:

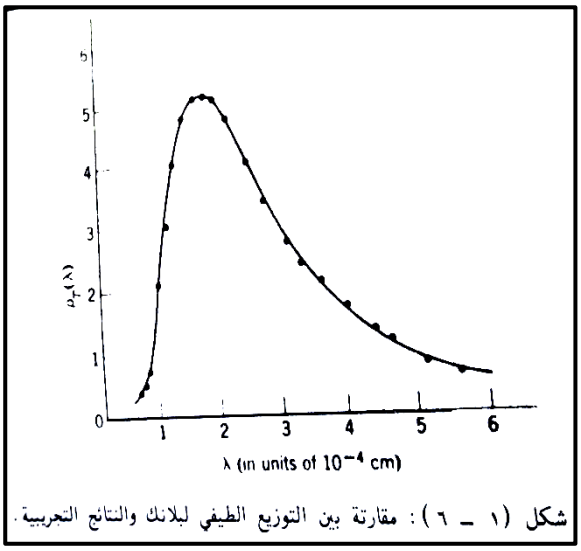
$$\bar{E} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} nh\nu \, e^{-nh\nu/KT}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nh\nu/KT}} = \frac{h\nu}{e^{h\nu/KT}-1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1-12)$$

ان هذه العلاقة تختلف بصورة واضحة عن الصيغة الكلاسيكية المعبر عنها في المعادلة (9−1,a)، الا انه عندما $h\nu \Longrightarrow 0$ فان المعادلة (12-1) تنطبق مع المعادلة (9−1,a).

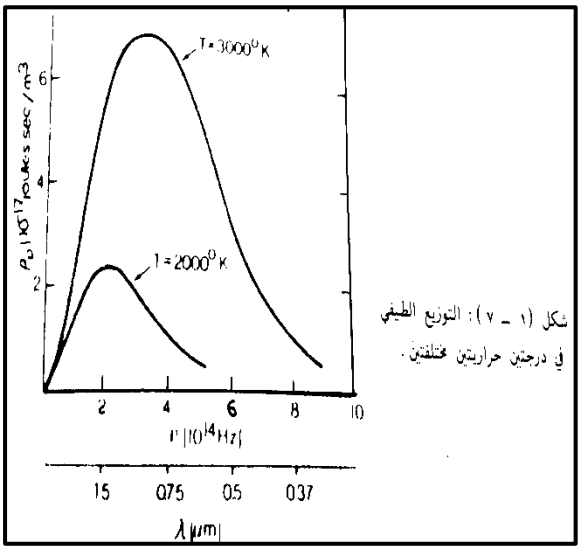
وبذلك تكون كثافة الطاقة الطيفية ($\rho_\nu\, d\nu$) لطيف الاشعاع لجسم اسود ولتجويف بدرجة حرارة (T) بالاعتماد على الصيغة الكمية ((مبدأ بلانك)) والتي كما مرّ سابقا تمثل حاصل ضرب معدل الطاقة الكلية مضروبا في عدد الأنماط لوحدة الحجم، فمن المعادلتين (8−1) و (12−1) نحصل على معادلة بلانك:

$$\rho_\nu(T)\, d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{C^3}\frac{h\nu}{e^{h\nu/KT}-1}\, d\nu \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1-13)$$

وهي معادلة التوزيع الطيفي لإشعاع الجسم الأسود كما وجده بلانك والذي هو في توافق تام مع النتائج التجريبية، ان أحسن قيمة للمقدار h لإكمال هذا التوافق هو ان تكون (h=6.63×10^{-34} J.s). يشير الشكل (6-1) الى مثل هذا التوافق عند درجة حرارية مساوية الى (1646 K)، كما يشير الشكل (7-1) الى التوزيع الطيفي لدرجتين



شكل (١ ـ ٦): مقارنة بين التوزيع الطيفي لبلانك والنتائج التجريبية.



شكل (١ ـ ٧): التوزيع الطيفي في درجتين حراريتين مختلفتين.

المصادر

1- فيزياء الليزر – سهام عفيف قندلا

2- Introduction to Laser Physics 1st Edition- K. Shimoda

3- Basics of Laser Physics: For Students of Science and Engineering. (Graduate Texts in Physics) 2nd Edition.