وزارة التعليم العالي
والبحث العلمي
جامعة الانبار
كلية العلوم/ قسم الفيزياء

اسم المادة: الليزر/1

المستوى الدراسي: الدراسات الأولية

المرحلة: الثالثة

المحاضرة السابعة

عنوان المحاضرة: حسابات اينشتاين لمعاملات الاحتمالية

مدرس المادة

أ.م. د جمال مال الله رزيج العبيدي

حسابات اينشتاين لمعاملات الاحتمالية

لما كان انبعاث الخط الطيفي لانتقال معين لا يعتمد فقط على تأهيل المستوي الأعلى بل أيضا على احتمالية حدوث هذا الانتقال، فلقد درس اينشتاين العلاقة بين احتمالات الانتقال للعمليات الثلاثة انفة الذكر وبطريقة مبسطة لا تعتمد على النظرية الكمية فقد تمت هذه الحسابات بالاعتماد على قواعد الثرموداينمك قبل ظهور وتطور النظرية الكمية.

إذا فرضنا بان مادة وُضعت في تجويف للإشعاع الكهرومغناطيسي حيث حُفظت جدران هذا التجويف بدرجة حرارة منتظمة (T) فعند حصول التوازن الحراري ينتشر الاشعاع الكهرومغناطيسي خلال التجويف فيصيب المادة المغمورة فيه ويكون لهذا الاشعاع، كما أسلفنا، توزيع طيفي معين تُعطى كثافته (ρ_v) بالمعادلة (1-13). الان لو نظرنا الى مستويين للطاقة لذرة المادة، الشكل (1-13) وفرضنا بأن N_1 و N_2 $(atom\ /m^3)$ هما على التوالي تاهيل هذين المستويين في حالة التوازن أعلاه فهناك احتمالية اذن لحدوث كل من العمليات الثلاثة بين هذين المستويين وبالشكل التالي:

أولا: الانبعاث الذاتي من المستوي (2) الى المستوي (1) باحتمالية مقدارها (A_{21}) ذرة لكل ثانية وبانبعاث طاقة تساوي $(h\nu_{12})$ وان عدد مثل هذه الانتقالات في الثانية الواحدة وفي المتر المكعب من المادة يساوي $(A_{21}N_2)$. والمقدار (A) ثابت ويُدعى بمعامل الانبعاث الذاتي لأينشتاين.

ثانيا: الامتصاص اذ ان وجود المادة في وسط اشعاع كهرومغناطيسي وبكثافة $(\rho_{v_{12}})$ فان ذرة المادة التي هي في المستوي (1) قد تمتص هذا الاشعاع وتقفز الى المستوي (2) باحتمالية تساوي (W_{12}) ذرة لكل ثانية، حيث ان:

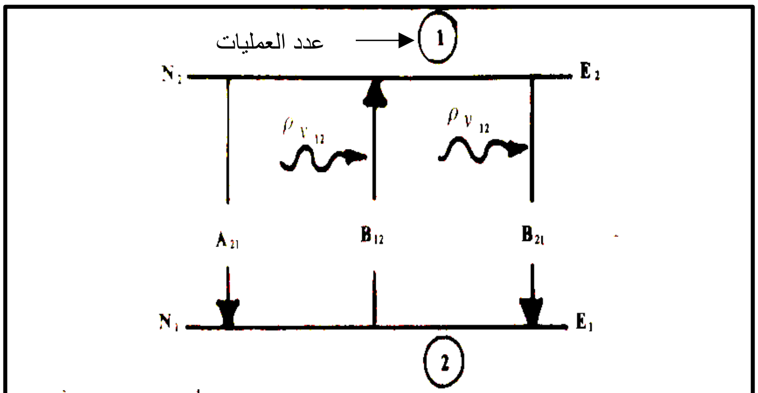
$$W_{12} = B_{12}\, \rho_{v_{12}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1-40, a)$$

والمقدار (B_{12}) ثابت ويُدعى بمعامل الامتصاص لآينشتاين، اما عدد مثل هذه الانتقالات من المستوي الأسفل باتجاه المستوي الأعلى في الثانية الواحدة وللمتر المكعب من المادة فيساوي $(W_{12}N_1)$.

ثالثا: الانبعاث المحفز وتتم هذه العملية أيضا بحضور المادة في وسط الاشعاع الكهرومغناطيسي ذو الكثافة الطيفية $\rho_{v_{12}}$ ، فالذرة وهي في المستوي الأعلى تتحفز بسبب هذا الاشعاع وتنتقل الى المستوي الاوطأ وباحتمالية تساوي W_{21} ذرة لكل ثانية، حيث ان:

$$W_{21} = B_{21}\, \rho_{v_{12}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1-40, b)$$

والمقدار (B_{21}) ثابت ويُدعى بمعامل الانبعاث المحفز لآينشتاين، اما عدد مثل هذه الانتقالات من المستوي الأعلى باتجاه المستوي الأسفل في الثانية الواحدة وللمتر المكعب من المادة فيساوي $(W_{21}N_2)$.



شكل (١ ـ ١٢) : توضيح المعاملات الاحتمالية لاينشتاين ، N_1 و N_2 تأهيل المستويين E_1 و E_2 على التوالي اما التردد ν_{12} فيعطى بالعلاقة : $h\nu_{12} = (E_2 - E_1)$

ولما كانت المادة في حالة توازن ثرموديناميكي، فان عدد الانتقالات باتجاه نحو الأسفل يجب ان يعادل عدد الانتقالات باتجاه نحو الأعلى، أي أن:

$$B_{12}\, N_1\, \rho_{v_{12}} = A_{21}N_2 + B_{21}N_2\rho_{v_{12}} \ldots\ldots\ldots.\ldots\ldots. (1-41)$$

وبترتيب الحدود يمكن ان نحصل على المعادلة التالية:

$$\rho_{v_{12}} = \frac{A_{21}N_2}{B_{12}\, N_1 - B_{21}N_2} = \frac{A_{21}}{B_{12}(N_1/N_2) - B_{21}}$$

وباستخدام إحصائية بولتزمان لحالة التوازن الثرموديناميكي ولتوزيع ذرات المادة على مستويات الطاقة لها (المعادلة 38−1)، أي أن:

$$\frac{N_2}{N_1} = exp^{\frac{-h\nu}{KT}}$$

تكون:

$$\rho_\nu = \frac{A_{21}}{B_{12}\, e^{\frac{h\nu}{KT}} - B_{21}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.\ldots\ldots..(1-42)$$

وبمقارنة هذه المعادلة مع معادلة بلانك (المعادلة 13−1) والتي فيها:

$$\rho_\nu = \frac{8\pi h\nu^3/C^3}{e^{h\nu/KT}-1}$$

ينتج أن: **<u>(H.W-1)</u>**

$$B_{12} = B_{21} = B \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(1-43)$$

وإن:

$$\boldsymbol{\frac{A}{B} = \frac{8\,\pi\,h\,\nu^3}{C^3} = \frac{8\,\pi\,h\,\nu^3\,n^3}{c_o^3} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(1-44)}$$

تشير المعادلة$(43-1)$ الى ان احتمالية حدوث عملية امتصاص المادة لإشعاع الجسم الأسود مكافئة تماما لاحتمالية حدوث عملية الانبعاث المحفز وبسببه أيضا، وهي نفس النتيجة التي استحصلت سابقا (المعادلة 29−1) ولكن بطريقة مختلفة تماما.

<u>المعالجة الديناميكية–الحرارية لأينشتاين:</u>

تتيح لنا المعادلة $(44-1)$ طريقة لحساب معامل الانبعاث التلقائي(A) إذا ما علمنا معامل الانبعاث المحفز (B) بفعل اشعاع الجسم الأسود. ومن السهولة الحصول على المعامل الأخير من المعادلة $(27,c-1)$. والحقيقة ان هذه المعادلة تكون صحيحة لإشعاع احادي الطول الموجي. في حالة اشعاع الجسم الأسود فان $(\rho_\nu d\nu)$ تمثل كثافة طاقة الاشعاع الذي تردده محصور بين ν و $\nu + d\nu$. ولو مثلنا هذه الاشعاعات بموجة أحادية الطول الموجي وبنفس القدرة، فانه يمكن الحصول احتمالية عنصر الانتقال (dw) بسبب هذه الاشعاع من تعويض $\rho_\nu d\nu$ بدلا من ρ في المعادلة $(27,c-1)$. وعند تكامل المعادلة الناتجة وعلى فرض انه يمكن تقريب $g(\Delta w)$ بدلالة دلتا ديراك (δ) نحصل على:

$$\boldsymbol{W = \frac{\pi}{3n^2\varepsilon_\circ\hbar^2}\;|\mu|^2\rho \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(1-44,a)}$$

وبمقارنة المعادلة أعلاه بالمعادلة $(40,a-1)$ او المعادلة $(40,b-1)$ نجد ان:

$$\boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{3n^2 \varepsilon_\circ \hbar^2}} \ |\boldsymbol{\mu}|^2 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..... (\mathbf{1 - 44}, \boldsymbol{b})$$

ونحصل أخيرا من المعادلتين $(1 - 44)$ و $(1 - 44, b)$ على: **<u>(H.W-2)</u>**

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mathbf{16} \ \boldsymbol{\pi^3} \ \boldsymbol{\nu^3} \ \boldsymbol{n}}{\mathbf{3} \ \boldsymbol{\varepsilon_\circ} \ \boldsymbol{\hbar} \ \boldsymbol{c_o^3}} \ |\boldsymbol{\mu}|^2 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.\ldots\ldots\ldots.. (\mathbf{1 - 44}, \boldsymbol{c})$$

إن صيغة (A) التي تم الحصول عليها هي بالاعتماد على قوانين ديناميكا الحرارة وقانون إشعاع بلانك. وباستخدام العلاقة $(1 - 44, c)$ يمكن الحصول على عمر الاشعاع لتلقائي والذي يساوي $(\tau_{sp} = 1/A)$.

من الأمور المهمة التي يجب ملاحظتها من العلاقات اعلاه:

أولا- ان عملية الانبعاث المحفز ضرورية لموازنة الانتقالات بالاتجاهين المتعاكسين في حالة التوازن.

ثانيا- طيف المنطقة المرئية وتحت البنفسجية

من مقارنة المعادلتين للمقدار (ρ_ν) في المعادلة $(1\text{–}42)$ ومعادلة بلانك فان الانتقال المحفز والمعبر عنه بالمقدار B_{21} يناظر المقدار (-1) في مقام معادلة بلانك والذي يمكن اهماله عندما تكون $h\nu \gg KT$ وان هذا الشرط يتوفر لانتقالات طيفية تردداتها واقعة في النطاق المرئي وكذلك تحت البنفسجي باستثناء درجات الحرارة العالية، أي ان عملية الانبعاث المحفز لمثل هذه الترددات ولدرجات حرارة أوطأ من 5000 كلفن تصبح مهملة نسبة الى عملية الانبعاث الذاتي. الا اننا يمكن ان نلغي تأثير هذا الشرط ونجعل عملية الانبعاث المحفز هي المهيمنة ولكن على حساب إخلال حالة التوازن الثرموديناميكي واحداث ظروف غير طبيعية لا تخضع فيها نسبة تأهيل مستويات الطاقة لإحصائية بولتزمان. ان ما نفعله هو خلق ظروف استثنائية لتأهيل المستوي الأعلى للطاقة (خلق تأهيل عكسي) لتنشيط عملية الانبعاث المحفز وهذا ما نحققه فعلا وهو ضروري للحصول على الليزر كما سنرى فيما بعد.

ثالثا– طيف الاشعة تحت الحمراء والميكروية

بما ان قيمة (A) تزداد مع مكعب التردد، لذا فان الانبعاث التلقائي يزداد بصورة كبيرة بزيادة التردد والحقيقة هي ان الانبعاث التلقائي يكون عادة مهملا في منتصف ونهاية طيف الاشعة تحت الحمراء اذ نجد الانحلالات غير الاشعاعية هي الغالبة. فلانتقالات ذي اطوال موجية واقعة في نطاق الاشعة تحت الحمراء او الاشعة الميكروية وفي حالة التوازن الثرموديناميكي سيكون المقدار $h\nu \leq KT$ ، فمثلا في درجات الحرارة الاعتيادية يكون المقدار KT مناظرا لانتقال ذي طول موجي مساويا للمقدار 50 مايكرومتر ففي هذه الحالة لا يمكن اهمال الانبعاث المحفز. اما تأهيل المستوي (2) فيكون حسب إحصائية بولتزمان مقاربا لتأهيل المستوي (1)، (في حالة توازن ثرموديناميكي). لا يمكن باي حال من الأحوال ان تكون $N_2 > N_1$ ، أي ان الانتقالات نحو الأعلى تساوي تقريبا تلك التي نحو الأسفل. زد على ذلك، تكون (A) في تناسب عكسي مع (λ^3) ، أي يكون الانبعاث المحفز لموجات طويلة اكبر بكثير من الانبعاث الذاتي لوسط يتواجد فيه اشعاع كهرومغناطيسي ذو شدة عالية. ان هذا يمثل سر اكتشاف اشعة الميزر قبل اشعة الليزر.

رابعا– طيف الاشعة السينية

عندما نعبر منطقة اشعة X-ray $(\lambda = 5\ nm)$ فان (τ_{sp}) يصبح متناهيا في الصغر $(10 - 100\ fs)$ حيث يشكل مشكلة كبيرة في تحقيق التأهيل المعكوس في ليزرات الاشعة السينية.

(H.W-3)

اثبت ان النسبة بين معدل الانبعاث الذاتي ومعدل الانبعاث الحفز تعطى بالصيغة:

$$R = e^{h\nu/KT} - 1$$

ثم جد قيمة R لمصباح تنكستن يعمل عند درجة حرارة $2000\ K$ وتردد انبعاث مساوي الى $5 \times 10^{14}\ Hz$.

مثال

بالاستعانة بمعادلة اينشتاين (معادلة 44−1)، عبِّر بصيغة رياضية عن مقطع الامتصاص (σ)، معامل الامتصاص (α) و معامل الكسب (G).

باستخدام معادلة 44−1 والاستعانة بالعلاقة $\rho_{\nu} = \rho\ g(\Delta\nu)$ يمكن كتابة:

$$\sigma = \frac{W}{F} = \frac{\rho\ B\ h\ \nu\ g(\Delta\nu)}{I}$$

$$\because\ I = \frac{\rho\ c_o}{n}$$

حيث (n) معامل انكسار الوسط و(c_o) سرعة الضوء في الفراغ، لذا تكون:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\boldsymbol{B\ n\ h\ \nu\ g(\Delta\nu)}}{\boldsymbol{c_o}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1-46)$$

وعليه باستخدام العلاقة $(34-1)$ نحصل على معامل الامتصاص:

$$\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{N_1} - \boldsymbol{N_2})\frac{\boldsymbol{B\ n\ h\ \nu\ g(\Delta\nu)}}{\boldsymbol{c_o}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. (1-47, a)$$

وكذلك باستخدام العلاقة $(\boldsymbol{39-1})$ نحصل على معامل الكسب:

$$\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{N_2} - \boldsymbol{N_1})\frac{\boldsymbol{B\ n\ h\ \nu\ g(\Delta\nu)}}{\boldsymbol{c_o}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. (1-47, b)$$

المصادر:

1- فيزياء الليزر – سهام عفيف قندلا

2- Introduction to Laser Physics 1st Edition- K. Shimoda

3- Basics of Laser Physics: For Students of Science and Engineering. (Graduate Texts in Physics) 2nd Edition.