الارتباط والاستقلال الخطي (Linear Dependence and Independence)

لمعرفة حلول المعادلة التفاضلية كونها مرتبطة او مستقلة خطياً يجب ايجاد محدد فرونسكي والذي يعرف بالشكل الاتي :-

محدد فرونسكي :- ليكن لدينا الدالتين $(y_2(x), y_1(x))$ قابلتين للاشتقاق بالنسبة لx فإننا نعرف محدد فرونسكي بالشكل

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = y_1 y'_2 - y_2 y'_1$$

اذا كان محدد فرونسكي مساوياً للصفر فان الحلول مرتبطة خطياً اما اذا كان غير مساوي للصفر فان الحلول مستقلة خطياً

* اذا كانت لدينا ثلاث دوال فان محدد فرونسكي يكون بالصيغة الاتية :-

$$W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \\ y''_1 & y''_2 & y''_3 \end{vmatrix}$$

$$W(y_1, y_2, y_3) = y_1 \begin{vmatrix} y'_2 & y'_3 \\ y''_2 & y''_3 \end{vmatrix} - y_2 \begin{vmatrix} y'_1 & y'_3 \\ y''_1 & y''_3 \end{vmatrix} + y_3 \begin{vmatrix} y'_1 & y'_2 \\ y''_1 & y''_2 \end{vmatrix}$$

مثال:- هل ان الحلول $y_2 = sin6x \quad , \quad y_1 = x^2$ مرتبطة ام مستقلة خطياً ؟

الحل:-

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = y_1 y'_2 - y_2 y'_1$$

$$W(x^2, sin6x) = \begin{vmatrix} x^2 & sin6x \\ 2x & 6cos6x \end{vmatrix} = x^2\, 6cos6x - 2x\, sin6x \neq 0$$

$\therefore$ الحلول مستقلة خطياً

مثال:- بين فيما اذا كانت الدوال $y_1 = e^{x}$, $y_2 = e^{-2x}$ مستقلة خطياً ام مرتبطة خطياً؟

$$W(e^{x}, e^{-2x}) = \begin{vmatrix} e^{x} & e^{-2x} \\ e^{x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = e^{x}\,(-2e^{-2x}) - e^{x}\,(e^{-2x}) \neq 0$$

$\therefore$ الحلول مستقلة خطياً

واجب بيتي :- بين فيما اذا كانت الدوال الاتية مستقلة خطياً او مرتبطة خطياً؟

1- $y_1 = 1 + x$, $y_2 = 1 + 2x$, $y_3 = x^2$,

2- $y_1 = 3e^{2x}$, $y_2 = 5e^{2x}$,

3- $y_1 = sinx$, $y_2 = cosx$, $y_3 = sin2x$.

مسائل القيم الابتدائية والحدودية (Initial and boundary value problems)

في بعض مسائل المعادلات التفاضلية تعطى بعض الشروط التي يجب ان تتحقق بحل المعادلة التفاضلية والتي تمكننا من ايجاد قيم الثوابت الاختيارية التي تظهر في الحل العام .

ولما كان الحل العام للمعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية يحتوي مثلاً ثابتين ، لذا يلزم وجود شرطين لإيجاد قيم الثوابت وهذان الشرطان لهما صوراً مختلفة منها

1- إذا أعطي هذان الشرطان عند نفس النقطة ولتكن $\boldsymbol{x_0}$ مثل

$$y(x_0) = \boldsymbol{a} \quad , y'(x_0) = \boldsymbol{b}$$

فإنها تدعى بالشروط الابتدائية وتسمى المعادلة مع هذه الشروط مسألة القيمة الابتدائية

2- أما إذا أعطي هذان الشرطان عند نقطتين مختلفتين ولتكن $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}$ مثل

$$y(x_1) = \boldsymbol{y_1} \quad , y'(x_2) = \boldsymbol{y_2}$$

تدعى بالشروط الحدودية وسميت المعادلة مع هذه الشروط مسالة القيمة الحدودية .

مثال:- اوجد حل مسالة القيمة الابتدائية

$$y'' = x \quad , \quad y(0) = 1 \quad , \quad y'(0) = -1$$

الحل :- نكامل المعادلة

$$y' = \frac{x^2}{2} + c_1 \ldots\ldots\ldots..(1),$$

نكامل المعادلة (1) مرة أخرى نحصل $y = \frac{x^3}{6} + xc_1 + c_2 \ldots\ldots\ldots\ldots.(2),$

نعوض الشروط الابتدائية في (1) و (2) نحصل

$$y'(0) = -1 \Rightarrow c_1 = -1$$

$$y(0) = 1 \Rightarrow c_2 = 1$$

ويكون حل المسالة المعطاة هو

$$y = \frac{x^3}{6} - x + 1$$

مثال:– اوجد حل مسالة القيمة الحدودية

$$y'' = 6x + 2 \ , \ y(0) = 2 \ , \ y(2) = 8$$

الحل :- نكامل طرفي المعادلة بالنسبة لx مرتين نحصل

$$y = x^3 + x^2 + ax + b$$

بتعويض الشروط الحدودية نحصل على

$$y(0) = 2 \Rightarrow b = 2$$

$$y(2) = 8 \Rightarrow a = -3$$

والحل يكون $y = x^3 + x^2 - 3x + 2$

ملاحظة /عند استخدام الشروط فان الحل يدعى بالحل الخاص

واجب بيتي :– جد الحل لمسائل القيم الابتدائية والحدودية التالية

1- $y'' = 2 - 6x \ , \ y(0) = 1 \ , \ y'(0) = 4,$
2- $y'' - 1 = 0 \ , \ y(0) = 1 \ , \ y'(0) = 2,$
3- $y' + e^x = 0 \ , \ y'(1) = 1,$
4- $\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \ , \ y'(0) = 1, \ y(1) = 2$