المعادلات التفاضلية الاعتيادية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى

1- المعادلات القابلة لفصل المتغيرات (Separable equations)

وهي المعادلة التي بالشكل $y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y)$ وهذه الدالة يجب ان تكون مستمرة لx

هناك عدة حالات :-

1- إذا كانت المعادلة تابعة لx فقط

$$y' = f(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f(x) \Rightarrow dy = f(x)\, dx$$

عندئذ نكامل الطرفين

$$y = \int f(x)\, dx + c$$

2- إذا كانت المعادلة تابعة لy فقط

$$y' = f(y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f(y) \Rightarrow dy = f(y)\, dx$$

$$\Rightarrow dx = \frac{dy}{f(y)} \quad \text{بالتكامل} \quad \Rightarrow x = \int \frac{dy}{f(y)} + c$$

3- إذا كانت المعادلة تابعة ل x , y قابلة لفصل المتغيرات وتكتب

$$y' = f(x, y) \Rightarrow f_1(x) g_1(y).\, dx + f_2(x) g_2(y).\, dy = 0$$

حيث إن x, y دوال مستمرة ومعرفة بالنسبة ل f_1, g_1, f_2, g_2

نقسم طرفي المعادلة على المقدار $f_2(x) g_1(y) \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx + \frac{g_2(x)}{g_1(x)} dy = 0$$

وهي معادلة تفاضلية يمكن إيجاد الحل العام بفصل المتغيرات

* المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى ذات الصيغة $f_1(x).dx + f_2(y).dy = 0$

تدعى قابلة لفصل المتغيرات

مثال :- اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $x\frac{dy}{dx} = 1 + x$

الحل :- نقسم طرفي المعادلة على x نحصل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+x}{x} \Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} + 1$$

$$\Rightarrow dy = \left(\frac{1}{x} + 1\right)dx \quad \text{بالتكامل} \Rightarrow \int dy = \int \frac{1}{x} + 1\, dx$$

$$y = ln|\,x\,| + x + c$$

مثال :- اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $y' = 3x^2y$

الحل:- نضرب طرفي المعادلة ب dx

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2y \quad dx \text{ نضرب طرفي المعادلة بـ } \Rightarrow dy = (3x^2y)dx$$

بالقسمة على y نحصل

$$\frac{dy}{y} = (3x^2)dx$$

تكامل طرفي المعادلة

$$\int \frac{dy}{y} = \int (3x^2)dx \Rightarrow ln|y| = x^3 + c$$

$$y = e^{x^3+c}$$

مثال: - اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $(1-x)dy-(1+y)dx=0$

الحل:- نفصل المتغيرات بقسمة المعادلة على $(1-x)(1+y)$ نحصل

$$\frac{dy}{(1+y)}-\frac{dx}{(1-x)}=0$$

تكامل الطرفين

$$\int\frac{dy}{(1+y)}-\int\frac{dx}{(1-x)}=0\Rightarrow ln|1+y|+ln|1-x|=c$$

نأخذ الـ e للطرفين

$$(1+y)(1-x)=e^{c}=c_1$$

واجب بيتي :-

1- اوجد الحل العام للمعادلة الآتية $\frac{dy}{dx}=2x+5$

2- جد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $4xydx+(x^2+1)dy=0$

حيث أن $y(0)=-1$

3- حل المعادلة الآتية $Cosx\ Cosydx+Sinx\ Sinydy=0$