$$\frac{ydy}{1-y^2}=\frac{xdx}{x^2-1}\Rightarrow\int\frac{ydy}{1-y^2}=\int\frac{xdx}{x^2-1}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\int\frac{-2ydy}{1-y^2}=\frac{1}{2}\int\frac{2xdx}{x^2-1}\Rightarrow -\frac{1}{2}\ln|1-y^2|=\frac{1}{2}\ln|x^2-1|+C$$

(3) $\sin^2 x\cos y\,dx+\sin y\sec x\,dy=0$

الحل: فصل المتغيرات يتم بقسمة الطرفين على $\cos y\sec y$ ينتج ان:

$$\frac{\sin^2 x}{\sec x}dx+\frac{\sin y}{\cos y}dy=0\Rightarrow\int\sin^2\cos x\,dx+\int\frac{\sin y}{\cos y}dy=C$$

$$\Rightarrow\frac{\sin^3 x}{3}-\int\frac{-\sin y}{\cos y}dy=C\Rightarrow\frac{\sin^3 x}{3}-\ln|\cos y|=C$$

H.W:

- $2x(y+1)dx-ydy=0$
- $x^2(1-y^2)dx+y(1+x^2)dy=0$
- $(y^2+y)dx-(x^2-x)dy=0$
- $y'=\frac{1+y}{1+x}$
- $y'=e^{x+y}$
- $x^2(y+1)dx+y^2(x-1)dy=0$
- $y'=\sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}}$
- $(1+y^2)dx+(1+x^2)dy=0$
- $(1+y^2)dx-\sqrt{1-x^2}dy=$

(٢) المعادلات المتجانسة من الرتبة الأولى والدرجة الأولى

(Homogenous Equations of First Order and First Degree):

تعريف: يقال للدالة $f(x,y)$ بأنها متجانسة من الدرجة n إذا حققت الشرط الآتي:

$$f(tx,ty)=t^n f(x,y)\qquad\qquad (t>0)$$

أمثلة: بيِّن فيما إذا كانت الدوال الآتية متجانسة، ثم جد درجة كل منهما:

(1) $f(x,y) = 7x^2 + 8xy - gy^2$

الحل:

$$f(tx,ty) = 7(tx)^2 + 8(tx)(ty) - g(ty)^2 = 7t^2x^2 + 8t^2xy - gt^2y^2$$
$$= t^2(7x^2 + 8xy - gy^2)$$
$$= t^2 f(x,y)$$

$\therefore$ الدالة $f(x,y)$ متجانسة ومن الدرجة ٢.

(2) $f(x,y) = x^3 - 2y^3 + 5y^2x$

الحل:

$$f(tx,ty) = (tx)^3 - 2(ty)^3 + 5(ty)^2(tx) = t^3x^3 - 2t^3y^3 + 5t^3y^2x$$
$$= t^3(x^3 - 2y^3 + 5y^2x)$$
$$= t^3 f(x,y)$$

$\therefore$ الدالة $f(x,y)$ متجانسة ومن الدرجة ٣.

(3) $f(x,y) = gx^2 - xy + 2x$

الحل:

$$f(tx,ty) = g(tx)^2 - (tx)(ty) + 2(tx) = gt^2x^2 - t^2xy + 2tx$$

$\therefore$ الدالة ليست متجانسة.

تعريف: المعادلة التفاضلية $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ يقال أنها متجانسة، إذا كانت كل من M و N دالة متجانسة ومتساوية بالدرجة.

مثال: $(x^2 - xy + y^2)dx - xydy = 0$

$N(x,y)$ متجانسة من الدرجة ٢. $M(x,y)$ متجانسة من الدرجة ٢.

∴ المعادلة هي معادلة تفاضلية متجانسة.

حل المعادلات التفاضلية المتجانسة:

الحل يتم بالتعويض الآتي:

$$y = vx$$
$$dy = vdx + xdv$$

فتتحول المعادلة التفاضلية المتجانسة إلى معادلة تفاضلية تنفصل متغيراتها يمكن إيجاد حلها بسهولة، وكما هو موضّح في الأمثلة الآتية:

<u>أمثلة:</u>

(1) $(x^2 - xy + y^2)dx - xy\,dy = 0$

الحل: المعادلة التفاضلية متجانسة تحل بفرض:

$$y = vx \Rightarrow dy = vdx + xdv$$

بالتعويض في المعادلة ينتج أن:

$$(x^2 - x(vx) + (vx)^2)dx - x(vx)(vdx + xdv) = 0$$
$$\Rightarrow (x^2 - x^2v + v^2x^2)dx - x^2v(vdx + xdv) = 0$$
$$\Rightarrow (x^2 - x^2v + v^2x^2 - x^2v^2)dx - x^3vdv = 0$$
$$\Rightarrow x^2(1-v)dx - x^3vdv = 0$$

يتم فصل المتغيرات بقسمة الطرفين على $x^3(1-v)$

$$\therefore \frac{dx}{x} - \frac{v}{1-v}dv = 0 \Rightarrow \int \frac{dx}{x} + \int \frac{v}{v-1}dv = \int 0$$
$$\Rightarrow \ln x + \int \frac{(v-1)+1}{v-1}dv = C \Rightarrow \ln x + \int dv + \int \frac{dv}{v-1} = C$$

$$\Rightarrow \ln x + v + \ln|v-1| = C \Rightarrow \ln x + \frac{y}{x} + \ln|\frac{y}{x} - 1| = C$$

(2) $xdy - \left(y + \sqrt{x^2 - y^2}\right)dx = 0$

∴ المعادلة التفاضلية متجانسة ومن الدرجة الأولى تحل بفرض:

$$y = vx \Rightarrow dy = vdx + xdv$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية ينتج أن:

$$x(vdx + xdv) - \left(vx + \sqrt{x^2 - v^2x^2}\right)dx = 0$$
$$\Rightarrow xvdx + x^2dv - \left(vx + \sqrt{x^2(1 - v^2)}\right)dx = 0$$
$$\Rightarrow xvdx + x^2dv - \left(vx + x\sqrt{(1 - v^2)}\right)dx = 0$$
$$\Rightarrow xvdx + x^2dv - vxdx - x\sqrt{1 - v^2}dx = 0$$
$$\Rightarrow x^2dv - x\sqrt{1 - v^2}dx = 0 \Rightarrow \frac{dv}{\sqrt{1 - v^2}} - \frac{dx}{x} = 0$$
$$\Rightarrow \int \frac{dv}{\sqrt{1 - v^2}} - \int \frac{dx}{x} = C \Rightarrow \sin^{-1} v - \ln|x| = C$$
$$\Rightarrow \sin^{-1}(\frac{y}{x}) - \ln|x| = C$$

<u>H.W:</u> Solve the following equations:

(1) $(xy - y^2)dx - x^2dy = 0$
(2) $(2xy + y^2)dx - 2x^2dy = 0$
(3) $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$
(4) $xy^2dy - (x^3y^3)dx = 0$
(5) $x\left(1 + e^{y/x}\right)dy + (x - y)e^{y/x}dx = 0$
(6) $xdy - (y + \sqrt{x^2 + y^2}dx = 0$