3- المعادلات التفاضلية الخطية (Linear D.E)

ان الصيغة القياسية للمعادلة التفاضلية الخطية يمكن كتابتها بالشكل

$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)$ → معادلة خطية بالنسبة لـ y

قد تكون المعادلة التفاضلية خطية بالنسبة الى اي متغير اخر وليكن x كما في الشكل

$\frac{dx}{dy} + p(y)x = f(y)$ → معادلة خطية بالنسبة لـ x

طريقة حل المعادلات الخطية

1- نضع المعادلة بالصيغة القياسية للمعادلة الخطية
2- من الصيغة القياسية للمعادلة نجد عامل التكامل $M = e^{\int p(x)dx}$
3- نعوض عامل التكامل في العلاقة $M.y = \int M.f(x)dx$
4- نجري التكامل في الطرف الايمن نحصل على الحل y

مثال :- حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} - 3y = 0$

الحل:- المعادلة بالصيغة القياسية لذا تحل مباشرة حيث ان $p(x) = -3,\ f(x) = 0$

نجد عامل التكامل $M = e^{\int p(x)dx} = e^{\int -3dx} = e^{-3x}$

نعوض عامل التكامل في العلاقة $M.y = \int M.f(x)dx$

$$e^{-3x}.y = \int e^{-3x}.(0)dx \rightarrow e^{-3x}.y = c \rightarrow y = c\,e^{3x}$$

مثال :- حل المعادلة التفاضلية الاتية $x\frac{dy}{dx} - 4y = x^6e^x$

الحل:- نضع المعادلة بالصيغة القياسية بالقسمة على x نحصل

$$\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x}y = x^5e^x$$

نجد عامل التكامل $M = e^{-\int \frac{4}{x} dx} = e^{-4lnx} = e^{lnx^{-4}} = x^{-4}$

نعوض عامل التكامل في العلاقة $M.y = \int M.f(x)dx$

$$x^{-4}.y = \int x^{-4}.x^5 e^x dx \rightarrow x^{-4}y = \int xe^x \, dx$$

تكامل الطرف الايمن من المعادلة

ملاحظه // هنا التكامل يكون بالتجزئة لان الدوال داخل التكامل احدهما بمعزل عن الاخرى اي لا توجد علاقة بينهما ويكون التكامل وفق الجدول الاتي

u	dv
x ↘	e^x
1 ↘	$+e^x$
0	$-e^x$

علية يكون ناتج التكامل

$$x^{-4}.y = xe^x - e^x + c$$

نضرب طرفي المعادلة بـx^4 نحصل $y = x^5e^x - x^4e^x + cx^4$

الذي يمثل الحل العام للمعادلة

واجب // حل المعادلات التفاضلية الاتية

1- $\frac{dy}{dx} - \frac{3}{x}y = x^4$

2- $\frac{dy}{dx} + 2y = x$

3- $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = 1$