الفصل الخامس

طرائق حل المعادلات التفاضلية من الرتب العليا

Method of solving higher order differential equations

تناولنا في الفصل السابق التعريفات الرئيسة المتعلقة بحل المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة وغير المتجانسة ذات الرتب العليا ومبرهناتها، ولكن لم نذكر طرائق إيجاد حل تلك المعادلات التفاضلية. في هذا الفصل نتناول أهم الطرائق التحليلية لإيجاد حلول معادلات تفاضلية خطية متجانسة وغير متجانسة، ذات معاملات ثابتة ومتغيرة. سنركز على المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية، نتناول في بعض الاحيان الرتبة الثالثة والرابعة وأعلى.

تأمل المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية ذات المعاملات المتغيرة على الفترة I :

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=0 \qquad (5.1)$$

حيث إنّ $a_2(x)\neq 0$. لقد بينا في الفصل السابق أنّ حلها العام هو:

$$y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x) \qquad (5.2)$$

حيث إنّ $y_1(x)$ و $y_2(x)$ هي المجموعة الأساسية للحلول للمعادلة التفاضلية (5.1) على الفترة I .

لقد بينا في البند (1.4.3) أن المعادلة (5.1) تكافىء:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=0 \qquad (5.3)$$

حيث إنّ $P(x)$ و $Q(x)$ دالتان متصلتان معرفتان على الفترة I .

5.1 طريقة اختزال الرتبة (Reduction of order)

سنبدأ بالمعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية ذات المعاملات المتغيرة ولكن أحد الحلين معلوم. تأمل المعادلة التفاضلية (5.3)، لنفرض أنّ y_1 أحد الحلول غير الصفرية لها معرف على الفترة I . سنحاول التعرف على طريقة لايجاد الحل الثاني y_2 للمعادلة التفاضلية نفسها بطريقة اختزال الرتبة ، على أن يكون y_1 و y_2 مستقلين خطياً. تعود هذه التسمية لكون الطريقة المستخدمة وهي التعويض باستخدام الحل المعلوم حيث: $y_2=u(x)\,y_1$ سيختزل رتبة المعادلة (5.3) الى الرتبة الأولى ثم نقوم بحلها والحصول على الحل الثاني. قبل اشتقاق القانون العام نبدأ بالمثال الآتي الذي سيوضح الفكرة.

المثـال (1): لـيكن $y_1 = e^x$ حـلاً للمعادلـة التفاضـلية: $y'' - y = 0$ علـى الفتـرة $(-\infty, \infty)$، استخدم طريقة اختزال الرتبة لإيجاد الحل الثاني ثم الحل العام.

الحل: نفرض أنّ الحل العام للمعادلة التفاضلية هو: $y = u(x) y_1 = ue^x$

نشتق ونعوض في المعادلة التفاضلية فنحصل على:

$$y' = ue^x + u'e^x \quad \text{و} \quad y'' = ue^x + 2u'e^x + u''e^x \text{ ،}$$

$$y'' - y = ue^x + 2u'e^x + u''e^x - ue^x = e^x(2u' + u'') = 0$$

بما أنّ $e^x \neq 0$ **، فنحصل على:** $2u' + u'' = 0$ **.**

الآن نستخدم التعويض: $w = u'$ **ومنها نحصل على** $w' = u''$ **، وبالتعويض في المعادلة السابقة نحصل على:** $w' + 2w = 0$ **وبالضرب بعامل التكامل** e^{2x} **، نحصل على:**

$$\frac{d}{dx}(e^{2x} w) = 0$$

باجراء عملية التكامل، نجد أنّ: $w = c_3 e^{-2x}$ **ومنها نحصل على:** $\frac{du}{dx} = c_3 e^{-2x}$ **،**

وباجراء عملية التكامل ثانيةً، نحصل على: $u = -\frac{1}{2} c_3 e^{-2x} + c_1 = c_2 e^{-2x} + c_1$ **، حيث إنّ** $c_2 = -\frac{1}{2} c_3$**. وعليه فإن الحل العام هو:**

$$y = e^x u = e^x (c_2 e^{-2x} + c_1) = c_2 e^{-x} + c_1 e^x$$

إذاً الحل الثـاني هو: $y_2 = e^{-x}$**. بمـا أنّ:** $W(e^x, e^{-x}) \neq 0$ **، فـأنّ الحلين مسـتقلان خطيـاً وعليـه فهما المجموعة الأساسية لحلول المعادلة التفاضلية:** $y'' - y = 0$ **على الفترة** $(-\infty, \infty)$**.**

طريقـة عامـة: نبدأ الآن بشـرح خطوات الطريقـة المسـتخدمة لايجـاد الحـل الثـاني للمعادلـة التفاضـلية (5.3) إذا علم الحل الأول على الفترة I **، ثم نشتق قانون بموجبه نجد ذلك الحل:**

1. **نضع المعادلة التفاضلية بصيغة (5.3)، أي:** $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ **.**
2. **نفرض الحل المعلوم** y_1 **، وأنّ الحل العام هو** $y(x) = u(x) y_1$**.**
3. **نشتق الحل العام مرتين ونعوض في المعادلة التفاضلية ثم نجري تبسيطاً ، فنحصل على:**

$$y'' = uy_1'' + 2u'y_1' + u''y_1 \quad \text{و} \quad y' = uy_1' + u'y_1$$

$$uy_1'' + 2u'y_1' + u''y_1 + P(x)(uy_1' + u'y_1) + Q(x)uy_1$$

$$= u\left(y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1\right) + 2u'y_1' + u''y_1 + P(x)u'y_1$$

$$= u(0) + 2u'y_1' + u''y_1 + P\,u'y_1 = 0$$

لأن y_1 تحقــق المعادلــة (5.3) كونهــا حــلاً لهــا. عليــه تصــبح المعادلــة التفاضــلية:

$$u''y_1 + 2u'y_1' + P\,u'y_1 = 0$$

ومنها نحصل على: $u'' + 2u'\dfrac{y_1'}{y_1} + P\,u' = 0$

4. نفرض أنّ $u' = w$ **، ثم نعوض في المعادلة السابقة ونجري تبسيطاً، فنحصل على:**

$$w' + 2w\frac{y_1'}{y_1} + P\,w = 0$$

لاحظ أنّ المعادلة اصبحت من الرتبة الاولى وهذا هو سبب تسمية الطريقة باختزال الرتبة، حيث إنّ الرتبة اختزلت من الثانية الى الأولى، ومنها نحصل على: $\dfrac{w'}{w} + 2\dfrac{y_1'}{y_1} = -P$

5. بــاجراء عمليــة التكامــل نحصــل علــى: $\ln\left|w\,y_1{}^2\right| = -\int P dx + c$ **، أي أنّ:**

$w = c_2\dfrac{e^{-\int p dx}}{y_1{}^2}$ **، حيث أنّ** $c_2 = e^c$**.**

6. بالتعويض عن w **بما يساويها** u' **، ثم اجراء عملية التكامل، نحصل على:**

$$u = c_2\int \frac{e^{-\int p dx}}{y_1{}^2}dx + c_1$$

7. بما أنّ الحل العام هو $y(x) = u(x)y_1$ **، عليه يكون:** $y = c_2 y_1\int \dfrac{e^{-\int p dx}}{y_1{}^2}dx + c_1 y_1$

8. إذاً الحل الثاني :

$$y_2 = y_1\int \frac{e^{-\int p dx}}{y_1{}^2}dx \qquad (5.4)$$

ملاحظات:

1. إذا كان $P(x)=0$ فإنّ المعادلة (5.4) تأخذ الصيغة: $y_2 = y_1\int \frac{1}{y_1{}^2}dx$.

2. الحلان y_1 و $y_2 = y_1\int \frac{e^{-\int p dx}}{y_1{}^2}dx$ مستقلان خطياً لأنّ $W(y_1,y_2)\neq 0$.

3. تستخدم هذه الطريقة عندما تكون المعادلة التفاضلية خطية متجانسة ذات معاملات متغيرة أو ثابتة وأحد الحلول معلوم.

المثال (1): استخدم القانون لايجاد الحل الثاني للمعادلة التفاضلية: $x^2y''-3xy'+4y=0$ إذا علمت أن الحل الأول: $y_1=x^2$ ، ثم احسب الحل العام على الفترة $(0,\infty)$.

الحل: نقسم على x^2 **اولاً:** $y''-\frac{3}{x}y'+\frac{4}{x^2}y=0$ ، **ثم نطبق القانون فنحصل على:**

$$y_2 = x^2\int \frac{e^{-\int -\frac{3}{x}dx}}{x^4}dx = x^2\int \frac{e^{3\ln x}}{x^4}dx = x^2\int \frac{1}{x}dx = x^2\ln x$$

إذاً الحل العام على على الفترة $(0,\infty)$ **هو:**

$$y = c_1\,x^2 + c_2\,x^2\ln x$$

ملاحظة: الحلان x^2 **و** $x^2\ln x$ **مستقلان خطياً على الفترة** $(0,\infty)$**، حقق ذلك.**

المثال (2): استخدم القانون لايجاد الحل الثاني للمعادلة التفاضلية: $y''+9y=0$ إذا علمت أن الحل الأول: $y_1=\sin 3x$ ، ثم احسب الحل العام على الفترة $(-\infty,\infty)$.

الحل: نستخدم الصيغة: $y_2 = y_1\int \frac{1}{y_1{}^2}dx$ **فنحصل على:**

$$y_2 = \sin 3x\int \frac{1}{\sin^2 3x}dx = \sin 3x\int \csc^2 3x dx$$

$$= (\sin 3x)(-\frac{1}{3}\cot 3x) = -\frac{1}{3}\cos 3x$$

أي الحل الثاني هو: $y_2=\cos 3x$ **(لماذا؟) والحل العام هو:** $y=c_1\sin 3x + c_2\cos 3x$.