5.2 المعادلات الخطية المتجانسة من الرتب العليا ذات المعاملات الثابتة

(Higher order liner homogenous DE with constant coeficients)

نتناول في هذا البند المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية بمعاملات ثابتة من النمط:

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (5.5)$$

حيث إنّ a و b ، و c ثوابت حقيقية، وإنّ $a \neq 0$.

بما أن $\frac{d}{dx}e^{rx} = re^{rx}$ نفرض أنّ الحل من النمط: $y = e^{rx}$ حيث إنّ r ثابت مطلوب إيجاده.

نشتق الحل مرتين ونعوض في المعادلة السابقة، نحصل على:

$$ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0 ،$$

بالقسمة على e^{rx} ، لأنّ $e^{rx} \neq 0$ لجميع قيم x ، نحصل على المعادلة المساعدة (Auxiliary):

$$ar^2 + br + c = 0 \qquad (5.6)$$

وهي معادلة جبرية من الدرجة الثانية يمكن حلها وحساب جذريها، كما يأتي:

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

هنالك ثلاثة احتمالات، تبعاً للمقدار المميز $(b^2 - 4ac)$ موجب أم سالب أم صفر.

الحالة الأولى: جذران حقيقيان مختلفان

إذا كان $b^2 - 4ac > 0$ ، فعندئذٍ نحصل على جذرين حقيقين مختلفين للمعادلة (5.6)، وهما:

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{و} \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ويكون الحلان هما:

$$y_1 = e^{r_1 x} \quad \text{و} \quad y_2 = e^{r_2 x}$$

لاحظ أنّ الحلين مستقلان خطياً حسب محدد رونسكيان ولأنّ $r_1 \neq r_2$. أي أن الحلين يشكلان المجموعة الأساسية لحلول المعادلة التفاضلية (5.5). وأنّ الحل العام هو:

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

المثال (1): جد حل المعادلة التفاضلية : $y'' + 3y' - 4y = 0$

الحل: المعادلة المساعدة التي تقابل المعادلة التفاضلية هي:

$$r^2+3r-4=(r+4)(r-1)=0$$

إذاً $r_1=-4$ و $r_2=1$ ، وعليه فالحل العام: $y=c_1e^{-4x}+c_2e^{x}$.

الحالة الثانية: جذران حقيقيان متساويان

إذا كان $b^2-4ac=0$ ، فعندئذٍ نحصل على جذرين حقيقين متساويين للمعادلة (5.6)، وهما:

$$r_1=r_2=\frac{-b}{2a}=r$$

ويكون الحل الأول هو:

$$y=e^{rx}=e^{-\frac{b}{2a}}$$

أما الحل الثاني، فيمكن حسابه باستخدام طريق اختزال الرتبة، أي القانون (5.4) كما يأتي:

نعيد كتابة المعادلة التفاضلية (5.5) ، لتصبح:

$$y''+\frac{b}{a}y'+\frac{c}{a}y=0$$

عندئذٍ، باستخدام القانون نحصل على:

$$y_2=y_1\int\frac{e^{-\int p\,dx}}{y_1^{\,2}}dx=e^{rx}\int\frac{e^{-\int\frac{b}{a}dx}}{e^{2rx}}dx=e^{rx}\int\frac{e^{-\frac{b}{a}x}}{e^{2rx}}dx=e^{rx}\int dx=xe^{rx}$$

لأنّ $\frac{-b}{a}=2r$ **. عليه فإنّ الحلين هما:** $y_1=e^{rx}$ و $y_2=xe^{rx}$

لاحظ أنّ الحلان مستقلان خطياً حسب محدد رونسكيان . أي أنّ الحلين هما المجموعة الأساسية لحلول المعادلة التفاضلية. وأنّ الحل العام هو:

$$y=c_1e^{rx}+c_2\,x\,e^{rx}$$

المثال (2): جد حل المعادلة التفاضلية : $y''+2y'+y=0$

الحل: المعادلة المساعدة التي تقابل المعادلة التفاضلية هي:

$$r^2+2r+1=(r+1)^2=0$$

إذاً $r_1=r_2=-1$ **، وعليه فالحل العام:**

$$y=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}$$

الحالة الثالثة: جذران عقديان أحدهما مرافق للآخر

إذا كان $b^2 - 4ac < 0$ **، فعندئذٍ نحصل على جذرين عقديين أحدهما مرافق للآخر للمعادلة (5.6)، وهما:**

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = \frac{-b}{2a} \pm i\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

نفرض $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ **، حيث إنّ:** $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ **و** $\beta = \dfrac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$ **عددان حقيقيان و** $\beta > 0$**.**

أي أنّ الجذرين هما: $r_1 = \alpha + i\beta$ **،** **و** $r_2 = \overline{r_1} = \alpha - i\beta$**. عليه يكون الحلان هما:**

$$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x} \quad \text{و} \quad y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x}$$

وأنّ الحل العام هو:

$$y = C_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + C_1 e^{(\alpha - i\beta)x} \qquad (5.7)$$

يمكن اعادة كتابة الحل (5.7) بصيغة اكثر ملاءمة للتطبيق في الفصول القادمة مستعيناً بصيغة اويلر (Euler's formula) الآتية: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ **، ومنها نحصل على:**

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

سميت الصيغة باسم الرياضي الشهير اويلر الذي سيرد ذكره في الفصل العاشر.

عليه يمكن تبسيط المعادلة (5.7) لتأخذ الصيغة:

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{\alpha x} e^{i\beta x} + C_2 e^{\alpha x} e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}(C_1 e^{i\beta x} + C_2 e^{-i\beta x}) \\ &= e^{\alpha x}\left(C_1(\cos\beta x + i\sin\beta x) + C_2(\cos\beta x - i\sin\beta x)\right) \\ &= e^{\alpha x}\left((C_1 + C_2)\cos\beta x + i(C_1 - C_2)\sin\beta x\right) \end{aligned}$$

إذاً الحل هو:

$$\boxed{y = e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x)}$$

حيث إنّ: $c_1 = C_1 + C_2$ **و** $c_2 = i(C_1 - C_2)$ **هي ثوابت.**

المثال (3): جد الحل العام للمعادلة التفاضلية : $y'' + 4y' + 20y = 0$ **ثم جد الحل الذي يحقق:** $y(0) = 3,\ y'(0) = -1$ **.**

الحل: المعادلة المساعدة التي تقابل المعادلة التفاضلية هي: $r^2 + 4r + 20 = 0$

إذاً $$r_{1,2}=\frac{-4\pm i\sqrt{16-4(20)}}{2}=\frac{-4\pm i\sqrt{-64}}{2}=-2\pm 4i$$

أي: $\alpha=-2$ و $\beta=4$ ، عليه فالحل العام:

$$y=e^{-2x}(c_1\cos 4x+c_2\sin 4x)$$

المثال (4): أعد حل المثال (3) باضافة الشروط الابتدائية: $y(0)=3,\ y'(0)=-1$ الى المعادلة التفاضلية.

الحل: نشتق الحل العام الذي حصلنا عليه في المثال السابق:

$$y'=-2e^{-2x}(c_1\cos 4x+c_2\sin 4x)+e^{-2x}(-4c_1\sin 4x+4c_2\cos 4x)$$

ثم نعوض في الشروط الابتدائية، فنحصل على

$$3=e^{0}(c_1\cos 0+c_2\sin 0)=c_1$$

$$-1=-2e^{0}(c_1\cos 0+c_2\sin 0)+e^{0}(-4c_1\sin 0+4c_2\cos 0)=4c_2-2c_1$$

أي أنّ: $c_1=3$ **و** $4c_2-2c_1=-1$ **. ومنها نحصل على:** $c_1=3$ **و** $c_2=\frac{5}{4}$ **، إذاً**

حل مسألة القيم الابتدائية:

$$y=e^{-2x}(3\cos 4x+\frac{5}{4}\sin 4x)$$

يمكن تلخيص الحالات الثلاث السابقة كما في المخطط الآتي:

المخطط الانسيابي لحل المعادلات المتجانسة من الرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة