قانون كاوس (Gauss's Law)

قبل دراسة قانون كاوس واستخداماته يجب التعرف على ما يسمى بفيض المجال الكهربائي (φ_E) الذي يعرَّف بأنه **عدد خطوط القوة الكهربية التي تخترق بصورة عمودية مساحة (A)** ، أي:

$$\varphi_E = \int \mathbf{E}.\mathbf{dA} = E \,.\, A$$

أما **قانون كاوس** فإن نصه هو:

العلاقة بين فيض المجال الكهربائي (φ_E) التي تنفذ عمودياً من سطح افتراضي مغلق ، وقيمة الشحنة الكلية التي يحتويها هذا السطح داخله.

ويمكن كتابته بالصورة الرياضية التالية:

$$\varphi_E = \oint E.dA = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

اشتقاق قانون كاوس من قانون كولوم

نفرض شحنة نقطية (q)، داخل سطح مغلق على شكل كرة نصف قطرها (R).

وعليه فان شدة المجال الكهربي عند أية نقطة على سطح الكرة تساوي:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{q}{R^2}$$

أما فيض المجال الكهربي من السطح (الكروي) المغلق فهو:

$$\varphi_E = \oint E.dA = E.A = E.(4\pi R^2)$$

حيث ان $A = 4\pi R^2$ المساحة السطحية للكرة، وبتعويض قيمة (E) من قانون كولوم نجد:

$$\varphi_E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{q}{R^2}(4\pi R^2)$$

$$\therefore \varphi_E = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

وهو قانون كاوس.

تطبيقات قانون كاوس:

بإستخدام قانون كاوس يمكن حساب شدة المجال الكهربي الناتج عن توزيع منتظم للشحنات وبتماثل تام. وبناءاً على هذا يمكننا حساب شدة المجال الكهربي للكرات المشحونة وللأسطوانات الطويلة وكذلك للصفائح المستوية الواسعة، لحساب شدة المجال الكهربي هناك بعض الخطوات العامة التي من الممكن إتباعها، وهي:

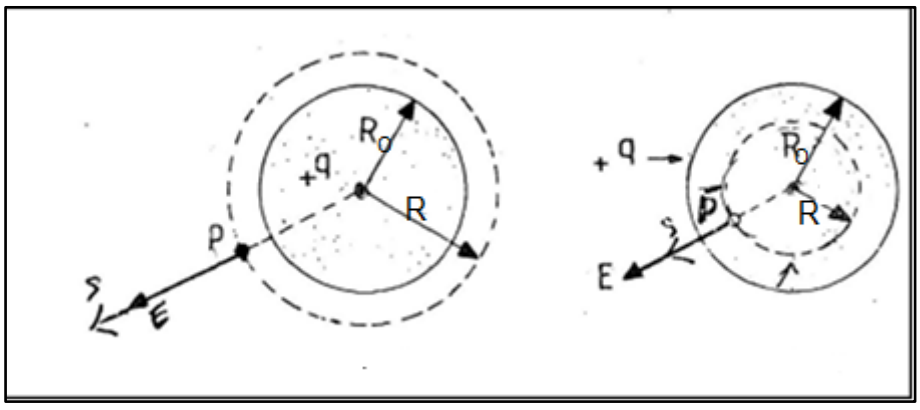
(1) نفترض وجود سطح مغلق- وفق الشكل الهندسي - يحيط بالشحنات المعينة ويمر بالنقطة المراد حساب شدة المجال عندها.

(2) حساب التكامل الخاص بفيض المجال الكهربي.

(3) نحسب الشحنة الكلية (q) الموجودة داخل السطح المغلق، ثم نعوض قيمتها في قانون كاوس لنحصل على قيمة المجال.

تطبيقات لقانون كاوس:

سنحاول حساب المجال الكهربي عند نقطتين، إحداهما خارج الكرة والأخرى داخلها. في كلتا الحالتين سنفترض أن السطح المغلق هو كرة نصف قطرها(R).



الشكل يوضح : أ- المجال خارج الكرة ، ب- المجال داخل الكرة

١ـ المجال الكهربائي لكرة مصمتة من مادة عازلة:

نفترض أن نصف قطر الكرة هو (R_0) وأن شحنتها موجبة وكثافتها الحجمية (ρ). سنحاول حساب شدة المجال الكهربي لنقطة تقع خارج الكرة وأخرى داخلها وثالثة على سطحها.

أـ المجال داخل الكرة:

نختار سطحاً كروياً مغلقاً نصف قطره (R) أصغر من نصف قطر الكرة، ($R_O<R$). ونلاحظ هنا أن السطح المغلق يحوي جزءاً من الشحنة الكلية يمكن تحديده بنفس الطريقة السابقة، لنفرض لهذا الجزء من الشحنة (q_1)، أي:

$$q_1 = (4/3\,\pi R^3).\rho$$

بالتعويض في قانون كاوس، نجد:

$$\varphi_E = \oint E.dA = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

ومنه فإن:

$$E(4\pi R^2) = \frac{q_1}{\varepsilon_0} = \frac{4\pi R^3 \rho}{3\varepsilon_0}$$

$$E(4\pi R^2) = \frac{4\pi R^3 \rho}{3\varepsilon_0}$$

$$\mathbf{E = (\frac{\rho}{3\varepsilon_0})\, R}$$

المعنى الفيزيائي: ان شدة المجال تتناسب تناسبا طرديا مع نصف القطر، أي كلما زاد نصف القطر زادت شدة المجال.

بـ المجال خارج الكرة:

نختار السطح المغلق الذي نصف قطرها (R) أكبر من نصف قطر الكرة، **($R > R_0$)**، فنجد:

$$\oint E.dA = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\because A = 4\pi R^2$$

$$\oint E.dA = E\oint dA = E(4\pi R^2) = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

وواضح أن (q) هي الشحنة الكلية للكرة وذلك لوقوعها داخل السطح المغلق. يمكن حساب (q) بضـــرب حجـــم الكـــرة $(\frac{4}{3}\pi R_0^3)$ في الكثافة الحجمية للشحنات **(ρ)**، أي ان:

$$q = (\frac{4}{3}\pi R_0^3)\ \rho$$

نعوض عن q في المعادلة السابقة لقانون كاوس نجد ان:

$$E\oint dA = E(4\pi R^2) = \frac{4}{3}\pi R_0^3 \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

وسنجد بسهولة أن:

$$\therefore\ E = (\frac{\rho}{3\varepsilon_0}).(\frac{R_0^3}{R^2})$$

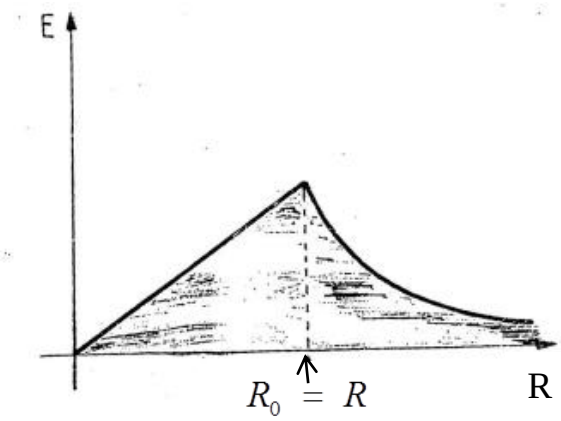
المعنى الفيزيائي: ان شدة المجال تتناسب تناسبا عكسيا مع نصف القطر، أي كلما زاد نصف القطر قلت شدة المجال.

ج- المجال على سطح الكرة:

يمكننا إيجاد المجال الكهربي على سطح الكرة، أي عندما يتساوى نصف قطر السطح المغلق مع نصف قطر الكرة، وذلك بتعويض $(R_0 = R)$، في معادلة المجال خارج الكرة، أي:

$$E = (\frac{\rho}{3\varepsilon_0})\frac{R_0^3}{R_0^2}$$

$$\therefore\ E = (\frac{\rho}{3\varepsilon_0})R_0$$



المصادر

١- اساسيات الكهربائية والمغناطيسية ، تأليف يحيى عبد الحميد الحاج علي / وزارة التعليم العالي والبحث العلمي / جامعة الموصل ١٩٩٦

٢- الكهربائية والمغناطيسية ، تأليف يحيى عبد الحميد الحاج علي / وزارة التعليم العالي والبحث العلمي / جامعة الموصل.

٣- الكهربائية والمغناطيسية ، تأليف ابراهيم ناصر ابراهيم علي /الجزء الثاني/ وزارة التعليم العالي والبحث العلمي / جامعة بغداد ١٩٨٦