السرعة في الموقع (o) تكون اعظم مايمكن V_{max} الطاقة الكلية تكون جميعها حركية أي ان

$$E_{total} = Ek = \frac{1}{2} m v_{max}^2$$

حيث إشارة v تعتمد اتجاه الحركة

$$v_{m_a x} = \pm \sqrt{2E/m}$$

اما في نهاية المسار تكون الطاقة جميعها كامنة والحركية صفر

$$E = Ep = \frac{1}{2} K x_{max}^2$$

$$x_{max} = \pm \sqrt{2E/K} \qquad **$$

ان السرعة V عند أي إزاحة X تساوي

$$v = \sqrt{\frac{2E - kx^2}{m}} \qquad ***$$

عند تعويض المعادلة **في المعادلة *** ينتج انه

$$\frac{dx}{dt} = v = \sqrt{\frac{K}{m}} \sqrt{A^2 - x^2}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \sqrt{\frac{k}{m}} dt$$

$$sin^{-1} \frac{x}{A} = \sqrt{\frac{k}{m}} t + C_2 \qquad Hw?$$

فاذا كانت X_0 هي قيمة X في اللحظة t=0 فان

$$C_2 = sin^{-1} \frac{X_0}{A}$$

وعليه فان C_2 هي الزاوية ونرمز لها بالرمز θ_o

$$sin\theta_o = \frac{X_o}{A}$$

$$\therefore\ sin^{-1}\frac{x}{A} = \sqrt{\frac{k}{m}}t + \theta_o$$

$$x = Asin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \theta_o\right)$$

θ_o هي زاوية طور ابتدائية.

و $\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \theta_o\right)$ هي زاوية طور الحركة

ويمكن التعبير عن الحركة الموجيه التوافقية البسيطة بشكل دالة جيب تمام أيضا اذا كانت زاوية الطور الابتدائية تساوي $\frac{\pi}{2}$ وبما ان دالة الجيب او الجيب تمام تتغير من (1 , 1-) فان الازاحة للجسم هي (x) تتغير مابين (A,-A) وان الازاحة X لها نفس القيمة في الزمن t والزمن (t+T)

وزاوية الطور $\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \theta_o\right)$ تزداد بمقدار 2π خلال الزمن أي ان

$$\sqrt{\frac{k}{m}}(t+T) + \cancel{\theta_0} = \left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \cancel{\theta_0}\right) + 2\pi$$

$$\sqrt{\frac{k}{m}}\ T = 2\pi \quad \Rightarrow \quad T = \sqrt{\frac{m}{k}}\ 2\pi$$

ان T تعتمد فقط على الكتلة m وثابت التناسب k, v تعتمد على السعة (او الطاقة الكلية cv وعليه فان T تكون ثابتة سواء كانت سعة الجسم صغيرة ام كبيرة

التردد f يساوي $2\pi f = w$

$$w = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\therefore x = Asin(wt + \theta_o)$$

$$\frac{dx}{dt} = v = w\sqrt{A^2 - x^2} = wAcos(wt + \theta_o)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = a = -w^2Asin(wt + \theta_o)$$

$$a = -w^2x$$

$$x + w^2x = 0$$

ان المعادلة الاخيرة هي الشكل العام لمعادلة الحركة التوافقية البسيطة وحلها هو

$$x = Asin(wt + \theta_o)$$

ان التعجيل في الحركة التوافقية البسيطة يتناسب مع الازاحة ويعاكسها وان التعجيل يبلغ قيمته العظمى عند $X_{max}=\pm A$

عندها السرعة تكون معدومة أي ان $a_{max} = \pm w^2 A$

عندما يمر الجسم بوضع التوازي $X=0$ فان سرعته تبلغ قيمتها العظمى وينعدم التعجيل أي ان

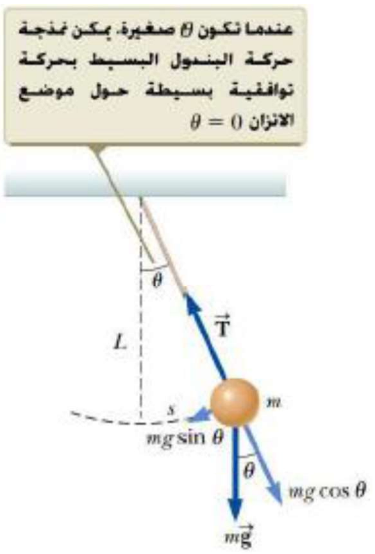
$v_{max} = \pm wA$

حيث ان اقصى قيمة لدالة الجيب او الجيب تمام هي ± 1

امثله على الحركه التوافقيه البسيطه

1- البندول البسيط; *The pendulum* ;

يعتبر البندول البسيط أحد الأنظمة الميكانيكيه التي تعمل حركة دورية. يتكون البندول البسيطة من جسم كتلته m معلق بخيط طوله L في أحد طرفيه والطرف الأخر ثابت، كما هو موضح في الشكل. تحدث الحركه على المستوى الراسي وتستمر تحت تاثير قوه الجاذبيه. سوف نثبت انه عندما تكون الزاوية θ صغيره اقل من 10^o (فان حركة البندول هي حركة توافقية بسيطة).



ان القوة القوه الموثره على الجسم المعلق هي قوة الشد T التي تتولد في الخيط وقوةالجاذبيه الأرضية mg. تؤثر المركبه المماسيه $mgsin\theta$ دائما في الاتجاه الذي يجعل الزاوية $\theta = 0$،

وفي عكس الإزاحة التي تحدث للجسم بالنسبة لموضع الاتزان. لهذا فان المركبه المماسيه تعتبر هي القوة الاسترجاعيه *restoring force*، ويمكننا هنا أن نطبق قانون نيوتن الثاني على الحركه في الاتجاه المماسي

$$Ft = ma \quad \rightarrow \quad -mg \sin\theta = m\frac{d^2s}{dt^2}$$

حيث ان s هي موضع الجسم مقاسا بطول القوس والإشارة السالبة تشير الى أن القوه المماسيه تشير الى نحو نقطة الاتزان. وحيث ان $s = \theta L$ وحيث أن L ثابتة فان المعادله السابقة تصبح على النحو التالي:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} sin\theta$$

باعتبار انθ هي الموضع. دعنا نقارن هذه المعادله مع المعادله 3.1. هل تمتلك نفس الشكل الرياضي يتناسب الشق الأيمن مع $sin\theta$ وليس مع θ، وهذا قد يقودنا الى أن نتوقع أن تكون هذه الحركه لا تخضع لقوانين الحركه التوافقية البسيطة، لان هذه المعادله ليس لها نفس الشكل الرياضي للمعادلة 3.1. على كل حال، إذا افترضنا إن الزاوية θ صغيره فمن االممكن أن نستفيد من التقريب$sin\theta \approx \theta$ ، وعليه فان هذا التقريب سوف يجعل المعادله على النحو التالي

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta$$

الآن اصبح لدينا معادلة حركة توافقية بسيطة مثل المعادله 3.1، ومنها نستنتج ان حركة البندول بإزاحات صغيره هي حركة توافقية بسيطة. وعليه يمكن أن نكتب دالة الزاوية $\theta = \theta_{max}\cos{(wt + \alpha)}$ حيث θ_{max}هي اكبرموضع زاوي للبندول والتردد الزاوي w يعطى على النحو التالي:

$$w = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

اما الزمن الدوري فيعطى على النحو التالي:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

ومن هنا نستنتج ان الزمن الدوري والتردد للبندول البسيط يعتمدان على طول الخيط وعلى عجلة الجاذبيه الارضية. بما ان الزمن الدوري لا يعتمد على كتلة الجسم المعلق في البندول، نستنتج ان كل بندول بسيط له نفس الطول له نفس الزمن الدوري بالطبع اذا كانوا على الكرة الارضية تحت تاثير عجلة الجاذبيه الارضية.

يمكن ان يتسخدم البندول البسيط في تحديد الوقت لان زمنه الدوري يعتمد فقط على طول البندول وعلى عجلة الجاذبيه الأرضية، كما يمكن ان يستخدم كاداة لقياس عجلة الجاذبيه الأرضية، وهذه القياسات مهمة جداً لرصد التغيرات في عجلة الجاذبيه الأرضية في مناطق مختلفه على سطح الكرة الأرضية وربما تساعد هذه القياسات في التنقيب عن النفط في بعض الاحيان.

مثال _1: جسم كتلته هي 25gm وثابت الحركة K=400 dyn/cm ابتدأ الحركة بإزاحة 10cm الى اليمين من موضع توازنه وبسرعة V=40cm/sec اوجد F,w,V,x,a

$x = Asin(wt + \theta_o)$
$v = Acos(wt + \theta_o)$
$a = -Aw^2 sin(wt + \theta_o)$

$$F = \frac{1}{T} \quad where \ T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{25}{400}} = 1.57sec$$

1- $F = \frac{1}{1.57} = 0.63\ sec^{-1}$

2- $\omega = 2\pi f = 2 * 3.14 * 0.63 = 4\ \frac{rad}{sec}$

3- $A = \sqrt{\frac{2E}{K}} \ where \ E = \frac{1}{2}m{v_o}^2 + \frac{1}{2}K{x_o}^2$

$$= \frac{1}{2} * 25 * 40^2 + \frac{1}{2}400 * 10^2 = 40 * 10^3 erg$$

$$A = \sqrt{\frac{2*40*10^3}{400}} = 10\sqrt{2}cm$$

$$sin\theta_o = \frac{X_o}{A} = \frac{10}{10\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \implies \theta_o = \frac{\pi}{4}rad$$

$$x = 10\sqrt{2} * \sin\left(4t + \frac{\pi}{4}\right)\ cm$$

$$v = 10\sqrt{2} * 4 * cos\left(4t + \frac{\pi}{4}\right) cm.s^{-1}$$

$$a = -10\sqrt{2} * (4)^2 * sin\left(4t + \frac{\pi}{4}\right) cm.s^{-2}$$

$$at \quad t=\frac{\pi}{8} \;\Rightarrow \left(4*\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{6\pi}{8}\right)=\frac{3\pi}{4}rad$$

$$x = 10\sqrt{2}*sin\frac{3\pi}{4} = 10\ cm$$

$$v = 40\sqrt{2}*cos\frac{3\pi}{4} = -40\ cm.s^{-1}$$

$$a = -160\sqrt{2}*sin\frac{3\pi}{4} = -160\ cm.s^{-2}$$

مثال_ 2: علق جسم كتلته *500gm* بنابض حلزوني كتلته مهملة فتمدد *0.07cm* احسب w, f اذا ازيح الجسم عن وضع توازنه الى الأسفل إزاحة تساوي *3cm* متجه نحو الأسفل وبسرعة تساوي *40cm/sec*

$$k=\frac{mg}{\Delta L}=70*10^3 dyn/cm$$

$$w=\sqrt{k/_m}=11.8rad/sec$$

$$\frac{1}{2}m{x_o}^2 = 315*10^3\ erg$$

$$\frac{1}{2}m{v_o}^2 = 4*10^5 erg$$

$$\therefore E = 715*10^3 erg$$

$$\frac{1}{2}kA^2 = 715*10^3 erg$$

$$\therefore A = 4.5cm$$

بعض الأمثلة الاخرى :

1- تمدد نابض بمقدار *3.9cm* عندما علق جسم كتلته *10g* احسب الزمن عندما يعلق فيه جسم كتلته *25g*

الحل :

$$F = k\Delta L = mg$$

$$k = \frac{mg}{\Delta L} = \frac{10 * 9.8 * 10^{-3}}{3.9 * 10^{-2}} = 2.5\frac{N}{m}$$

$$T = \frac{2\pi}{w} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{25 * 10^{-3}}{2.5}} = 0.635sec$$

2- جسم كتلته *20g* يتحرك حركة توافقية بتردد *3Hz* وبسعة مقدارها *5cm*

- ماهي المسافة الكلية للجسم المتحرك خلال دورة كاملة
- ماهي السرعة القصوى للجسم
- ماهو التعجيل الأقصى للجسم

الحل :

A=5cm

F=3Hz

- $d_{total} = 4A = 20cm$
- $v_{max} = Aw = A(2\pi f) = 5 * 3.14 * 3 = 94.2\frac{cm}{s}$

تظهر عند *x=0*

- $a_{max} = Aw^2 = 5(2 * 3.14 * 3)^2 = 4441\ cm/sec^2$

3- جسم معادلة الحركة له عند زمن *t=0.25 sec* هي $x = 4\cos(3\pi\, t + \pi)$ حيث ان x هي بالمتر والزمن هو بالثانية احسب :

- التردد والزمن
- السعة
- ثابت الطور
- المسافة للجسم عند الزمن *t=0.25 sec*

الحل:

$w = 3\pi\ , T = \frac{2\pi}{w} = \frac{2\pi}{3\pi} = 0.66\ sec$
$F = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.66} = 1.5\ Hz$
$A = 4m$
$\theta_0 = \pi$
$x(0.25) = 4cos(3\pi(0.25) + \pi) = 4cos(0.75\pi + \pi) = 4cos(1.75\pi)$
$= 4.0m(0.707) = 2.82\ m$

4- جسم كتلته *m* وضع على نابض وكانت *k=6.5 N/m* وترك يتذبذب بحركة توافقية بسيطة بسعة مقدارها *10cm* تم قياس السرعة عندما كانت الكتلة في منتصف المسافة بين نقطة التوازن واعلى نقطة وكانت *30cm/sec* احسب :

- كتلة الجسم
- زمن الحركة
- اعلى تعجيل للجسم

الحل :

$k = 6.5\ N/m \quad , \quad A = 10cm$

$x = 1/2\ A \quad , \quad v = 30cm/sec$

$x = Asinwt \quad , \quad V = AWcoswt$

$x(t_1) = \cancel{A}sinwt_1 = \frac{1}{2}\cancel{A}$

$sinwt_1 = \frac{1}{2} \ \Rightarrow \ wt_1 = 0.52\ rad$

$V(t_1) = Awcos(wt_1) = 30 \quad \Rightarrow \quad 10wcos(0.52) = 30$

$w = 3.64$