$$w = 2\pi F = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \Rightarrow \quad w^2 = \frac{k}{m} \quad \Rightarrow m = \frac{6.5\,\frac{N}{m}}{(3.64)^2} = 0.491\ kg$$

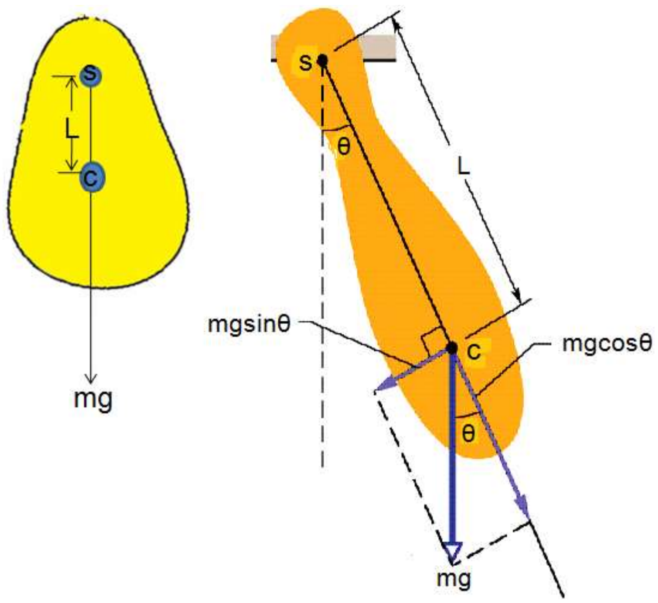
$$F = \frac{w}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{w} = \frac{2\pi}{3.64} = 1.73 sec$$

$$x = Asinwt, v = Awcoswt, a = -Aw^2 sinwt$$

$$a_{max} = Aw^2 = 10 * (3.64)^2 = 132\,\frac{cm}{sec^2}$$

2- البندول الفيزيائي أو البندول المركب: Physical Pendulum or Compound Pendulum

أن أي جسم صلب مهما كان شكله وقادر على التذبذب حول أي محور أفقي يمر خلاله يدعى بالبندول الفيزيائي (المركب). وفي الواقع فان جميع البندولات الحقيقية هي بندولات فيزيائية. وما البندول البسيط إلا حالة خاصة من هذا النوع من البندولات. لنأخذ بندول فيزيائي على شكل جسم غير منتظم يمكنه أن يدور حول محور أفقي أملس يمر من النقطة s التي تدعى بنقطة التعليق كما مبين بالشكل الأتي. يلاحظ من الشكل الذي يقع إلى اليمين انه في حالة التوازن يقع مركز الكتلة c للجسم على نفس الخط العمودي المار بنقطة التعليق s فإذا فرضنا أن المسافة بين نقطة التعليق ومركز الكتلة هي L وان كتلة الجسم هي m وان عزم القصور الذاتي للجسم حول نقطة التعليق حيث يمر محور الدوران هي I. في آية لحظة زمنية تكون القوة المؤثرة على الجسم عموديا نحو الأسفل هي mg وعند إزاحة الجسم إزاحة زاوية صغيرة θ فان الخط الواصل بين s و c يصنع زاوية θ مع العمود وبذلك يكون عزم القوة المعيدة التي تحاول أعادة الجسم إلى موضع توازنه الأصلي تساوي $mgL\sin\theta$ وهذا العزم الوحيد الذي ينتج التعجيل الزاوي $(d^2\theta/dt^2)$ في البندول . وعليه فان معادلة الحركة للبندول هي



الشكل على اليسار البندول في حالة توازن والشكل على اليمين البندول وقد أزيح إزاحة زاوية θ عن موضع التوازن

إن الإشارة السالبة هنا تشير إلى أن القوة المعيدة متجهة دائما نحو موضع التوازن. وإذا كانت الزاوية θ صغيرة صغرا كافيا، فعندئذ تكون العلاقة $sin\theta=\theta$ صحيحة لدرجة عالية من الدقة، وبذلك تصبح المعادلة (1) كالأتي

$$\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right) = -(\frac{mgL}{I})\theta \qquad (2)$$

وهذه تمثل معادلة الحركة الزاوية التوافقية البسيطة التي تحدث عندما تكون السعات صغيرة. وفي هذه الحالة يكون التردد الزاوي ω هو

$$\omega = \sqrt{\frac{mgL}{I}} \qquad (3)$$

ومن هذه العلاقة نجد التردد الطبيعي f و الزمن الدوري T على الترتيب

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mgL}{I}} \qquad (4)$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}} \qquad (5)$$

ويمكن إيجاد قيمة عزم القصور الذاتي I حول محور الدوران من العلاقة

$$I = mL^2 + mk^2 \qquad (6)$$

حيث أن k يمثل نصف قطر التدويم حول مركز كتلة البندول وبالتعويض نجد أن التردد الطبيعي للبندول المركب هو

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L+\frac{k^2}{L}}} \qquad (7)$$

وان الزمن الدوري هو

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L+\frac{k^2}{L}}{g}} \qquad (8)$$

وهنا يشير المقدار $(L+(k^2/L))$ إلى الطول المكافئ للبندول. والجدير بالذكر انه في السعات الكبيرة تكون حركة البندول الفيزيائي دورية، ولكنها لا تكون توافقية بسيطة.

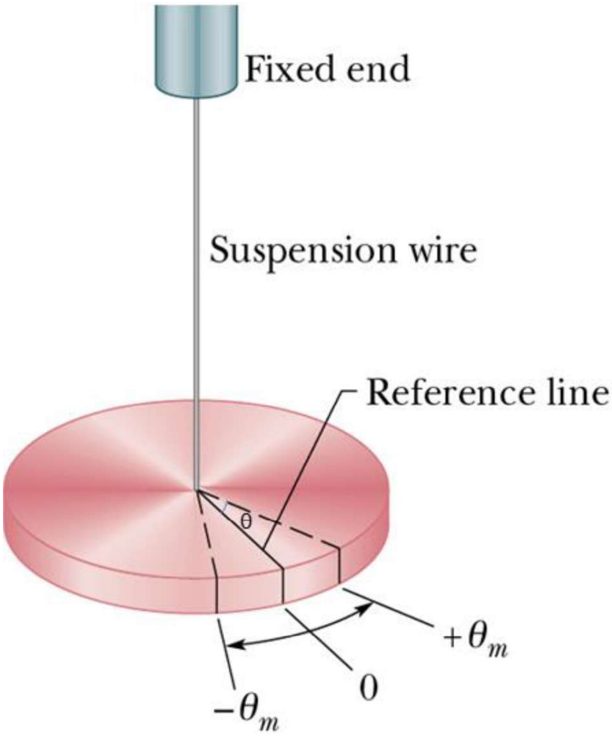
3-بندول اللي: Torsional Pendulum

يتألف بندول اللي من قرص اسطواني معلق من مركزه بطرف قضيب رقيق (أو سلك) يتصل بمركز ثقل القرص اتصالا وثيقا ويتصل الطرف الآخر من القضيب بمسند ثابت كما مبين بالشكل.عندما يكون البندول في وضع التوازن أي في حالة سكون نرسم خطا من المركز إلى النقطة $+\theta_m$ كما موضح في الشكل. إذا أدير القرص أفقيا إلى النقطة $-\theta_m$ بزاوية θ يحدث لي في القضيب ونتيجة ذلك يؤثر القضيب بعزم لي T يعمل على أعادة البندول إلى موضع التوازن الأصلي. ومن قانون هوك الذي يشير إلى أن عزم لي الإرجاع T يتناسب طرديا مع مقدار اللي الذي يتمثل بمقدار الإزاحة الزاوية θ أي أن $T\alpha\theta$ ومن ذلك نحصل على

$$\mathrm{T} = -k\theta \qquad (1)$$

حيث أن k هو ثابت التناسب ويدعى بثابت اللي ويتوقف مقداره على طول وقطر السلك وطبيعة مادته. والإشارة السالبة توضح أن عزم اللي يعمل في اتجاه معاكس لاتجاه زيادة الإزاحة الزاوية. وعندما يحرر البندول بعد إزاحته بزاوية θ فان عزم اللي الذي يمثل عزم القوة المعيدة يولد تعجيل زاوي $(d^2\theta/dt^2)$ يتناسب طرديا مع الإزاحة الزاوية ، والحركة الناتجة تدعى بالحركة الزاوية التوافقية البسيطة. ومعادلة الحركة لهذا البندول هي

$$\mathrm{T} = -k\theta = I(d^2\theta/dt^2) \qquad (2)$$



حيث I يمثل عزم القصور الذاتي للقرص، نرتب المعادلة (2)فتصبح

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -(\frac{k}{I})\theta \qquad (3)$$

ويلاحظ أن شكل هذه المعادلة مطابق تماما من وجهة النظر الرياضية للمعادلة القياسية للحركة الخطية التوافقية البسيطة

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -(\frac{k}{m})x \qquad (4)$$

حيث أننا استبدلنا الإزاحة الخطية x بالإزاحة الزاوية θ والكتلة m بعزم القصور الذاتي I وثابت النابض بثابت اللي k والحل العام للمعادلة (3) يمكن الحصول عليه بنفس الطريقة السابقة فنجد أن الإزاحة الزاوية θ في أية لحظة زمنية T هي

$$\theta = \theta_o cos(\omega t - \varphi) \qquad (5)$$

حيث أن θ_o هي النهاية العظمى للإزاحة الزاوية أي سعة الذبذبة الزاوية و φ هي زاوية الطور الابتدائي للحركة و ω هو التردد الزاوي والتردد الزاوي لبندول اللي هو

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{I}} \qquad (6)$$

ومنها نجد التردد الطبيعي f والزمن الدوري T على الترتيب

$\omega=2\pi f$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{I}} \qquad (7)$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}} \qquad (8)$$

مثال:جسم كتلته 1g يتذبذب بـS.H.M سعة الذبذبة 2mm وكان تعجيله في نهاية المسار $8000 m/S^2$. احسب زمن الذبذبة ، التردد وسرعة الجسيم عندما يمر في مركز الاستقرار، وعندما يكون على مسافة 1.2mm من موضع الاستقرار، ثم اكتب معادلة القوة المؤثرة على الجسم كدالة للإزاحة أولا وللزمن ثانيا.

ج: في نهاية المسار تصبح الإزاحة تساوي السعة، أي أن

$x=A$

$a=\omega^2 x$

$a=\omega^2 A$

$8000=2x10^{-3}\ \omega^2$

$\omega^2=8000/0.02=4x10^6$

$\omega=2x10^3 S^{-1}$

$T=2\pi(m/k)^{1/2}=2\pi/\omega=2\pi/2x10^3$

$T=\pi x10^{-3}=0.00314S$

$f=1/T=1000/\pi=318.31Hz$

$V_{max}=\omega A=2x10^3x2x10^{-3}=4m/S$

$V_{1.2mm}= [(k/m)(A^2-x^2)]^{1/2}=\omega\ (A^2-x^2)^{1/2}=2x10^3[(2x10^{-3})^2-(1.2x10^{-3})^2]^{1/2}$

$V_{1.2mm}=32m/S$

$F=-kx$

$\omega^2=k/m$

$k=\omega^2m=4x10^6x1x10^{-3}=4x10^3$

$F=4x10^3x1.2x10^{-3}=4.8N$

أي أن معادلة القوة كدالة للإزاحة تساوي

$F=-4x10^3.x$

ومعادلة القوة كدالة للزمن t.

$F=kAcos\omega t$

$F=4x10^3x2x10^{-3}cos2x10^3t$

$F=8cos2x10^3t$

مثال:نابض حلزوني ثبت طرفه العلوي في نقطة ووجد انه عند تعليق جسم كتلته 1kg يستطيل النابض بمقدار 10cm فإذا ابعد الوزن وعلق جسم كتلته 2kg بدلا عنه وسحب مسافة 8cm نحو الأسفل وأطلق من السكون احسب، ثابت القوة، مدة الذبذبة ، السرعة العظمى والتعجيل الأعظم، السرعة والتعجيل والزمن المستغرق بعد أن يقطع الجسم نصف المسافة بين موضعه الابتدائي ومركز الاستقرار.

ج:نستخدم الكتلة 2kg لان الجسم عندها بدا يتذبذب.

$F=-kx$

$k=F/x=mg/x=1x9.8/10x10^{-2}=98N/m$

$T=2\pi(m/k)^{1/2}=2\pi/\omega$

$T=2\pi(2/98)^{1/2}=(2\pi/7)=0.9S$

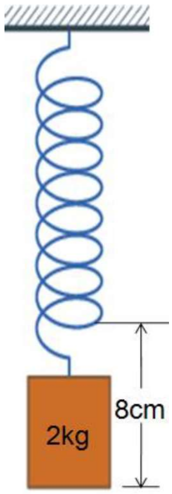
$V_{max}=\omega A=(2\pi/T)xA=7x8x10^{-2}=0.56m/S$

$a_{max}=\omega^2A=7^2x8x10^{-2}=3.92m/S^2$

$V_{4cm}=\omega(A^2-x^2)^{1/2}=7[(8x10^{-2})^2-(4x10^{-2})^2]^{1/2}=0.485m/S$

$a_{4cm}=\omega^2x=7^2x4x10^{-2}=1.96m/S^2$

$x=Acos\omega t$



$4=8\cos 7t$

$(4/8)=\cos 7t$

$0.5=\cos 7t$

$\cos^{-1}(0.5)=7t$

$(\pi/3)=7t$

$t=\pi/21=0.15S$

مثال:جسم كتلته 0.5kg يتحرك بـSHM بزمن ذبذبة 0.1S وسعة الذبذبة 10cm. احسب التعجيل، القوة، الطاقة الحركية والكامنة عندما يكون الجسم على بعد 5cm من موضع الاستقرار.

ج:

$a=\omega^2 x$

$a=(2\pi/T)^2 x=(4\pi^2/0.01)(5)=19739.21cm/S^2$

$F=ma=500(2000\pi^2)=59.22dyne$

$F=-kx=mx\omega^2=(4\pi^2/0.01)(500)(5)=59.22dyne$

$E_k=0.5m\omega^2(A^2-x^2)=(0.5)(500)(4\pi^2/0.01)(10^2-5^2)=74022033.01erg$

$Ep=0.5kx^2=0.5m\omega^2 x^2=(0.5)(500)(4\pi^2/0.01)(5^2)=24674011.003erg$

مثال:إذا كانت معادلة الحركة لجسيم تعطى بالمعادلة ($x=A\sin(\omega t+\pi/2)$)، افرض إن ($t=0$) وان الجسيم في أقصى إزاحة عن موضع استقراره. جد كل من (a,v,x).

ج:

عندما $t=0$ تصبح معادلة الحركة للجسيم

$$x=A\sin(\omega x0+\pi/2)=A\sin(90)=A$$

$$x=A\sin(\omega t+\pi/2)=A\cos(\pi/2)\sin\omega t+A\sin(\pi/2)\cos\omega t$$

$$x=A\cos(0)\sin\omega t+A\sin(90)\cos\omega t=0+A\cos\omega t$$

$$x=A\cos\omega t$$

$$v=(dx/dt)=-A\omega\sin\omega t$$

$$a=(d^2x/dt^2)=-A\omega^2\cos\omega t$$

مثال:يتحرك جسم حركة توافقية بسيطة سعتها 1.5m وترددها 100Hz، احسب:1.التردد الزاوي، 2.سرعته، 3.تعجيله، 4.طوره عندما تكون أزاحته 0.75m.

ج:

1.

$f=1/T$

$T=1/f=1/100=0.01S$

$T=2\pi(m/k)^{1/2}=2\pi/\omega$

$\omega=2\pi/T=2\pi/0.01=628.32Hz$

2.

$v=\omega A=628.32x1.5=942.5m/S$

3.

$a=\omega^2A=(942.5)^2x1.5=1332459.375m/S^2$

4.

$x=A\cos\theta$

$\cos\theta=x/A$

$\theta=\arccos(x/a)=\arccos(0.75/1.5)=\arccos(0.5)=60^o$

$x=A\sin\theta$

$\sin\theta=x/A$

$\theta=\arcsin(x/a)=\arcsin(0.75/1.5)=\arcsin(0.5)=30^o$