مثال:متذبذب توافقي بسيط معادلة حركته $x=4\sin(0.1t+0.5)$ أوجد:1.السعة، السرعة، التعجيل، التردد، زمن الذبذبة، الطور الابتدائي للحركة، 2.الظروف الابتدائية، 3.الموضع، السرعة، التعجيل عند $t=5S$.

ج:

1.

$A=4m,$

$v=dx/dt=0.4\cos(0.1t+0.5)$

$a=d^2x/dt^2=-0.04\sin(0.1t+0.5)=-0.04\cos(0.1x5+0.5)=-0.04\cos(1)=-0.04m/S^2$

$a=\omega^2x$

$0.04=4\omega^2$

$\omega=(0.04/4)^{1/2}$

$\omega=0.1$

$T=2\pi(m/k)^{1/2}=2\pi/\omega=2\pi/0.1=62.832S$

$f=1/T=1/62.832=0.016Hz$

$\varphi=0.5rad$

2.

$x=4\sin(0.1x0+0.5)=4\sin(0.5)=1.75m$

$v=dx/dt=0.4\cos(0.1x0+0.5)=0.4\cos(0.5)=4m/S$

$a=d^2x/dt^2=-0.04\sin(0.1t+0.5)=-0.04\cos(0.1x0+0.5)=-0.04\cos(0.5)=-0.04m/S^2$

3.

$x=4\sin(0.1x5+0.5)=4\sin(1)=6.98m$

$v=dx/dt=0.4\cos(0.1t+0.5)=0.4\cos(0.1x5+0.5)=0.4\cos(1)=0.4m/S$

$a=d^2x/dt^2=-0.04\sin(0.1t+0.5)=-0.04\cos(0.1x5+0.5)=-0.04\cos(1)=-0.04m/S^2$

الفصل الثالث

تركيب الحركات التوافقية البسيطة

لقد درسنا في الفصل الثاني أمثلة على حركة الجسيم المهتز بحركة توافقية بسيطة واحدة، ولكن الواقع هناك أمثلة كثيرة في الفيزياء تندمج فيها حركتان توافقيتان بسيطتان أو أكثر في آن واحد. فغشاء الطبلة في الأذن غالبا ما يتأثر بأكثر من حركة توافقية بسيطة نتيجة لالتقاط الأذن أصوات متعددة بترددات مختلفة في نفس الوقت، والبندول البسيط المعلق بمسند مثبت على سطح باخرة يتأثر آنيا بحركتين إذا ما اهتز كل من البندول والباخرة معا. وقد يكون تأثير هذه الحركات في الجسيم في خط مستقيم واحد أو في خطين مستقيمين متعامدين أو في أي اتجاه آخر. وفي جميع هذه الحالات سنحاول إيجاد محصلة الحركة الناتجة من تأثير هذه الحركات باستخدام قاعدة التركيب.

قاعدة التركيب

إن لهذه القاعدة أهمية خاصة لجميع أنواع الموجات والاهتزازات في الطبيعة، فهي حقيقة تجريبية يمكن التأكد من صحتها من خبراتنا اليومية. وهي تنص"على انه يمكن لحركتين اهتزازيتين أو موجيتين أو أكثر أن تحدثا في نفس النقطة دون أن تؤثر إحداها بالأخرى". "أي بعبارة أخرى يمكن لموجتين أو أكثر أن تنتقلا في وقت واحد خلال نفس النقطة في الفضاء دون أن تتأثر أية موجة بحركة الموجات الأخرى".

أمثلة على قاعدة التركيب

1. عند إلقاء حجرتين أو أكثر في مواقع متباعدة عن بعضها في بركة ساكنة من الماء فان كل حجر سيكون مصدر للموجة على سطح الماء. أن الموجات المتولدة ستتقدم وتتداخل مع بعضها ثم تخرج من منطقة التداخل وتستمر بالتقدم دون أن يتأثر بعضها بالأخر.

2. بالنسبة للموجات الصوتية، فنحن نسمع الصوت الصادر من مصدر معين بالرغم من أن هذا الصوت ينتقل في الفضاء الذي يحتوي على موجات صوتية أخرى.

3. وبالنسبة للموجات الضوئية كذلك نحن نرى الأجسام حولنا بوضوح بالرغم من أن الضوء الذي يصل إلى أعيننا من جسم معين ينتقل في فضاء يحتوي على موجات ضوئية كثيرة وفي مختلف الاتجاهات.

أن هذه الحقيقة التجريبية تشير إلى أن الموجات المختلفة تسلك سلوكا مستقلا عن بعضها البعض وهذا يعني انه إذا مرت مجموعة من الموجات في نقطة معينة في الفضاء فان محصلة الإزاحة في تلك النقطة تساوي مجموع الإزاحات المنفردة التي تحدثها الموجات كلا على حدة. إن هذه القاعدة تسري فقط على الحركات

الموجية والاهتزازية الخطية، أي في الحالات التي تخضع لقانون هوك ضمن حدود المرونة فقط، ويمكن التعبير عن الحركات الموجية أو الاهتزازية بمعادلات رياضية خطية.

وابرز هذه المعادلات هي معادلة الحركة التوافقية البسيطة. أن أهمية قاعدة التركيب تتضح بجلاء في أنها وسيلة فعالة تمكننا من تحليل الحركات الموجية والاهتزازية المعقدة إلى مركباتها التوافقية البسيطة. ولقد كان العالم الفرنسي فورير (*G.Fourier*) سباقا في التأكيد على أن الحركات الموجية والاهتزازية الدورية المعقدة ما هي في حقيقتها إلا مجموعة من الحركات التوافقية البسيطة. ومن الجدير بالتنويه إن هذه القاعدة على شموليتها فإنها مقيدة فقط على الحركات الصغيرة التي يمكن وصفها بالمعادلات الخطية حيث تكون سعة الموجة أو الاهتزاز ضئيلة وهذا ما يحدث في اغلب الحالات العملية. أما في حالات الحركة التي توصف بمعادلات غير خطية كتلك التي تمثل الاهتزازات العنيفة والموجات الراجة فان هذه القاعدة لا تتحقق. ولغرض التحليل والتعبير الرياضي عن هذه القاعدة سنستخدم المعادلة التفاضلية للحركة التوافقية البسيطة التي تم اشتقاقها في الفصل السابق وهي

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -w^2x \qquad 1$$

ويلاحظ من هذه المعادلة أن التعجيل $(\frac{d^2x}{dt^2})$ يتناسب خطيا مع الإزاحة من موضع التوازن x وان الحدين في هذه المعادلة مرفوعان للقوة واحد مما يعني أنها بتعبير رياضي معادلة خطية. وبالإضافة لذلك يلاحظ أن الحدين يحتويان نفس المتغير x مما يشير إلى أنها معادلة متجانسة. وان حل هذه المعادلة يعطي وصفا كاملا للحركة. أما إذا لم تكن المعادلة خطية أي أن حدودها لا تتضمن نفس المتغير عندئذ يصبح الحل صعبا ويحتاج إلى رياضيات متقدمة لتحليل الحركة الناتجة. إن مثل هذا غير مطلوب الآن. وسيقتصر تحليلنا الآن على المعادلة الخطية المتجانسة (1) فقط. لنفرض أن الحل الأول المناسب لهذه المعادلة هو

$$x = x_1 \qquad 2$$

حيث x_1 يمكن أن يأخذ أي شكل وليكن $A\sin\omega t$ مثلا. ولنفرض الحل الثاني المناسب لهذه المعادلة هو

$$x = x_2 \qquad 3$$

حيث x_2 يمكن أن يأخذ أي شكل آخر وليكن $B\cos\omega t$ مثلا. نعوض الحد الأول في المعادلة (1) فنجد أن

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + w^2x_1 = 0 \qquad 4$$

ونعوض الحد الثاني في المعادلة (1) فنجد أن

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} + w^2x_2 = 0 \qquad 5$$

نجمع المعادلتين (4) و (5) فينتج

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_1 + x_2) + w^2(x_2 + x_1) = 0 \qquad 6$$

وهذا يشير إلى أن هناك ثلاثة حلول للمعادلة (1) هي

$$x = x_1$$

$$x = x_2$$

$$x = x_1 + x_2 \qquad 7$$

من ذلك نستنتج إن هناك خاصية مهمة تميز المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة وهي إن التركيب الخطي لأي حلين لمثل هذه المعادلة يعتبر حلا مناسبا لها. أي أن المجموع البسيط لأي حلين هو حل ثالث للمعادلة الخطية المتجانسة. وهذه الخاصية غير صحيحة للمعادلات غير الخطية. إن هذه الخاصية تمثل قاعدة التركيب. وبما أن كل الحركات التوافقية البسيطة تتحكم بها معادلة خطية متجانسة فجميعها إذن تخضع لقاعدة التركيب. أي بصيغة أخرى إن محصلة اهتزازين توافقين أو أكثر مساويا لمجموع الاهتزازات المنفردة التي يتأثر بها الجسم. وسنطبق هذه القاعدة على الجسيم الذي يخضع لتأثير أكثر من حركة توافقية بسيطة واحدة.

2- **تركيب حركتين توافقيتين بسيطتين في نفس الاتجاه**

نفرض ان لدينا جسيما يخضع انيا لحركتين توافقيتين بسيطتين لهما نفس التردد على امتداد المحور السيني وتمثل الحركه التوافقيه البسيطه الاولى بالمعادله

$$x_1 = a_1 \sin(wt + \theta_1) \qquad 8$$

والحركه التوافقيه البسيطه الثانيه تعطى بالمعادله

$$x_2 = a_2 \sin(wt + \theta_2) \qquad 9$$

حيث x_1 و x_2 تمثلان الازاحتين الانيتين للجسيم نتيجه تاثير الحركتين التوافقيتين و a_1 وa_2 تمثلان سعتي الحركتين , θ_1 , θ_2 يمثلان زاويتي الطور الابتدائيتين , w التردد الزاوي .

ان محصله الازاحه x الناتجه من تركيب الازاحتين هي .

$\sin(A-B) = sinAcosB - sinBcosA$
$\sin(A+B) = sinAcosB + sinBcosA$
$\cos(A-B) = cosAcosB + sinBsinA$
$\cos(A+B) = cosAcosB - sinBsinA$

$$x = x_1 + x_2$$

$$x = a_1 \sin(wt+\theta_1) + a_2 \sin(wt+\theta_2)$$

$$x = a_1[\sin(wt)\cos(\theta_1) + \cos(wt)\sin(\theta_1)] + a_2[\sin(wt)\cos(\theta_2) + \cos(wt)\sin(\theta_2)]$$

$$x = [\{a_1\cos(\theta_1) + a_2\cos(\theta_2)\}\sin(wt)] + [\{a_1\sin(\theta_1) + a_2\sin(\theta_2)\}\cos(wt)]$$

حيث ان a_1 , a_2 , θ_1 , θ_2 , هي ثوابت يمكن ان نفرضها تساوي

$$a_1\cos(\theta_1) + a_2\cos(\theta_2) = Acos(\theta) \qquad *$$

$$a_1\sin(\theta_1) + a_2\sin(\theta_2) = Asin(\theta) \qquad **$$

وبذلك تكون المعادله اعلاه بالشكل التالي

$$x = Acos(\theta)\sin(wt) + Asin(\theta)\cos(wt)$$

$$x = A\sin(wt+\theta) \qquad 1$$

بتربيع وبجمع المعادليتين (* و**) نحصل على

$$[\{Acos(\theta)\}^2 + \{Asin(\theta)\}^2] = [\{a_1\cos(\theta_1) + a_2\cos(\theta_2)\}^2 + \{a_1\sin(\theta_1) + a_2\sin(\theta_2)\}^2]$$

$$A^2[cos^2\theta + sin^2\theta] = [a_1^2\,cos^2\theta_1 + a_2^2\,cos^2\theta_2 + 2a_1\,a_2\,cos\,\theta_1 cos\,\theta_2 + a_1^2\,sin^2\theta_1 + a_2^2\,sin^2\theta_2 + 2a_1\,a_2\,sin\,\theta_1 sin\,\theta_2]$$

$$A^2 = [a_1^2 + a_2^2 + 2a_1\,a_2\,(cos\,\theta_1 cos\,\theta_2 + sin\,\theta_1 sin\,\theta_2)]$$

$A^2 = [a_1^2 + a_2^2 + 2a_1\, a_2\, cos\,(\theta_2 - \theta_1) \qquad 2]$

الان بقسمه المعادليتين (* و**) نحصل على

$$\frac{Asin(\theta)}{Acos(\theta)} = \frac{a_1 \sin(\theta_1) \cancel{+}\, a_2 \sin(\theta_2)}{a_1 \cos(\theta_1) \cancel{+}\, a_2 \cos(\theta_2)}$$

$$\tan\theta = \frac{a_1 \sin(\theta_1) + a_2 \sin(\theta_2)}{a_1 \cos(\theta_1) + a_2 \cos(\theta_2)} \qquad 3$$

المعادله 1 تمثل محصله الازاحه الانيه x للحركتين التوافقيتين البسيطتين ونلاحظ بانها تشابه المعادلتين x_1 و x_2 مما يشير بانها تمثل حركه توافقيه بسيطه ايضا لها نفس التردد الزاوي المشترك لمركبتي الحركه . A تمثل السعه للحركه التوافقيه البسيطه الناتجه من جمع الحركتين ويمكن ايجادها من العلاقه 2. وان θ تمثل زاويه الطور الابتدائي لمحصله الحركه ويمكن ايجادها من العلاقه 3.

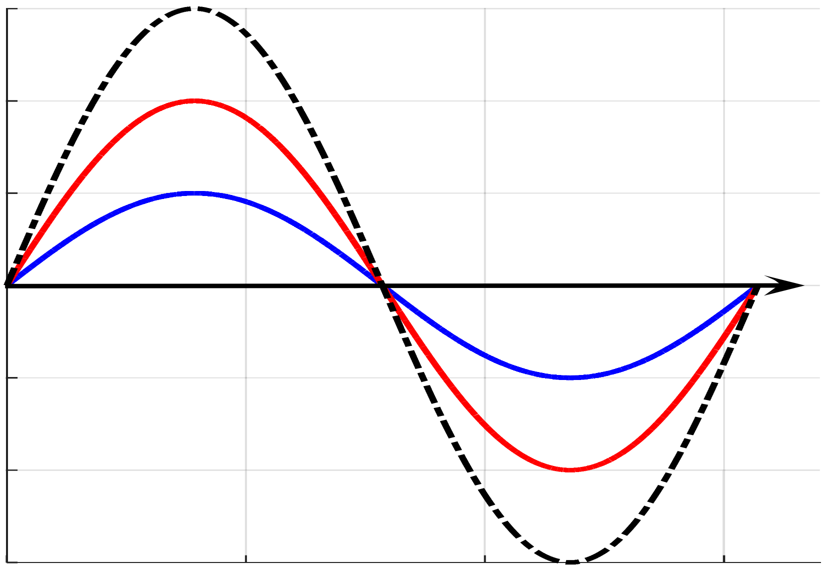
يمكن استخلاص بعض النتائج الهامه للحركه التوافقيه البسيطه من العلاقه 1 فيما يتعلق بالتداخل بين اي حركتين .

1- **<u>التداخل بين حركتين توافقيتين بسيطتين لهما نفس التردد والطور ويختلفان بالسعه</u>**
اي ان

$\theta_1 = \theta_2 = \theta$

فالمعادله تصبح كالاتي

$x = (a_1 + a_2)\sin(wt + \theta) \qquad prove\ that$



من الشكل اعلاه نلاحظ بان سعه الحركه الاهتزازيه الناتجه تساوي مجموع سعتي الحركتين المتداخلتين اللتين لهما نفس التردد والطور . اي ان الحركتين التوافقيتين في هذه الحاله تقويان بعضهما البعض ويسمى **التداخل البناء**. وعند تساوي السعتين فان محصلتهما تكون ضعف السعه الاصليه.

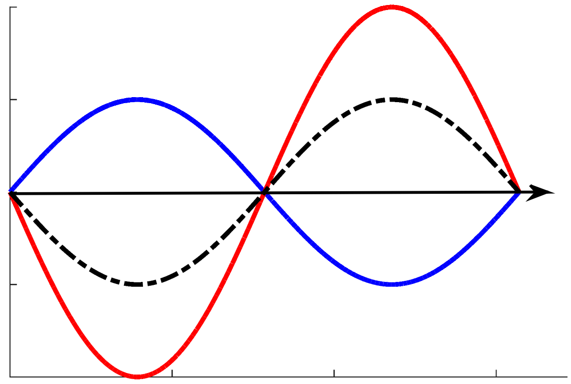
2- **التداخل بين حركتين توافقيتين بسيطتين لهما نفس التردد ولكن يختلفان بالسعه والطور.**

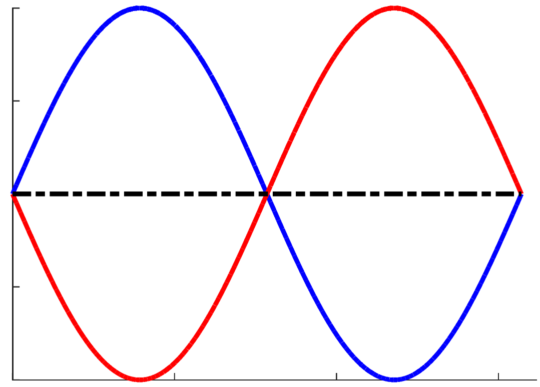
لناخذ حاله هي ان

$\theta_1 = 0$ و $\theta_2 = \pi$

تصبح المعادله اعلاه بالشكل التالي

$$x = (a_1 - a_2)\sin(wt) \qquad \qquad prove\ that$$





نلاحظ من الشكل بان محصله السعه تساوي الفرق بين سعتي الحركتين التوافقيتين المتداخلتين وتقع قمه احداهما فوق قعر الاخرى ان الحركتين تعاكس احداهما الاخرى وفي هذه الحاله فانهما تهدمان بعضهما البعض ويسمى **بالتداخل الهدام** . في حاله $a_1 = a_2$ فان المحصله تساوي صفرا كما في الشكل اعلاه.

أشكال ليساجو: Lissajous Figures

عندما يخضع جسيم آنيا لحركتين توافقيتين بسيطتين متعامدتين فان محصلة الحركة للجسيم تكون على مسار منحن، وشكل هذا المنحني يدعى بشكل ليساجو. أن هذا الشكل يعتمد على سعة وتردد كل من الحركتين التوافقيتين البسيطتين وفرق الطور بينهما. فلو كان لدينا بندول بسيط معلق من نقطة تتحرك بحركة توافقية بسيطة باتجاه المحور الصادي وسمح لكرة البندول أن تذبذب بنفس الوقت بسعة صغيرة باتجاه المحور السيني فان كرة البندول ستخضع لحركتين متعامدتين في وقت واحد. ونتيجة ذلك فان كرة البندول ستتحرك في بعدين بمسار يحدده محصلة هاتين الحركتين فإذا كانت النسبة بين ترددي الحركتين مساويا لعدد صحيح وفرق الطور بينهما زاوية معينة فان شكل المسار يكون مغلقا. ويمكن توضيح ذلك تحليليا وبيانيا بأمثلة محددة.

1. **تركيب حركتين توافقيتين بسيطتين في اتجاهين متعامدين**

لنفرض أن لدينا جسيما يتأثر آنيا بحركتين توافقيتين بسيطتين أحداهما تؤثر باتجاه المحور السيني والأخرى تؤثر باتجاه المحور الصادي وسنعتبر أولا الحالة التي يكون الترددان متساويين. فلو فرضنا أن الإزاحة الآنية للجسيم على امتداد المحور السيني هي

$$x = a sin(\omega t + \theta) \qquad 1$$

والإزاحة الآنية لنفس الجسيم على امتداد المحور الصادي هي

$$y = b sin\omega t \qquad 2$$

يلاحظ هنا أن الحركتين التوافقيتين السينية والصادية تختلفان في السعة والطور الابتدائي للحركة. وللحصول على المعادلة العامة لمسار الحركة نحذف الزمن بين المعادلتين (1) و (2). من المعادلة (1) نحصل على

$$\left(\frac{x}{a}\right) = sin\omega t cos\theta + cos\omega t sin\theta \qquad 3$$

ومن المعادلة (2) نحصل على

$$\left(\frac{y}{b}\right) = sin\omega t \qquad 4$$

وبالاستفادة من المتطابقة $(cos^2wt + sin^2wt = 1)$ تصبح المعادلة (4) على النحو

$$cos\omega t = \sqrt{1 - \left(\frac{y^2}{b^2}\right)} \qquad 5$$

نعوض المعادلتين (4) و (5) في المعادلة (3) فينتج أن

$$\left(\frac{x}{a}\right) = \left(\frac{y}{b}\right)cos\theta + \sqrt{1 - \left(\frac{y^2}{b^2}\right)}\, sin\theta \qquad 6$$

نرتب هذه المعدلة فتصبح

$$\left(\frac{x}{a}\right) - \left(\frac{y}{b}\right)cos\theta = \sqrt{1 - \left(\frac{y^2}{b^2}\right)}\, sin\theta \qquad 7$$

نربع طرفي المعادلة*(7)*

$$\left[\left(\frac{x}{a}\right) - \left(\frac{y}{b}\right)cos\theta\right]^2 = sin^2\theta\left(1 - \left(\frac{y^2}{b^2}\right)\right)$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{xy}{ab}\right)cos\theta + \left(\frac{y^2}{b^2}\right)cos^2\theta = \left(sin^2\theta - \left(\frac{y^2}{b^2}\right) sin^2\theta\right)$$

نختزل هذه المعادلة ونرتبها فتصبح كالأتي

$$\left(\frac{x^2}{a^2}\right) + \left(\frac{y^2}{b^2}\right) - \left(\frac{2xy}{ab}\right) cos\theta = sin^2\theta \qquad 8$$

أن المعادلة *(8)* تمثل المعادلة العامة للقطع الناقص *(Ellipse)* وهذه تمثل شكل المسار الذي يسلكه الجسيم عندما يخضع لتأثير حركتين توافقيتين بسيطتين لهما نفس التردد وسعتين مختلفتين وفرق الطور بينهما θ.
ومن هذه المعادلة يمكن الحصول على أشكال ليساجو لمختلف قيم θ كما يأتي