1.**عندما $\boldsymbol{\theta = 0, 2\pi}$ فان المعادلة (8) تصبح**

$$\{(\frac{x}{a}) - (\frac{y}{b})\}^2 = 0$$

$$y = \left(\frac{b}{a}\right)x \qquad 9$$

هذه المعادلة تشير إلى أن شكل المسار الذي يسلكه الجسيم يكون خطا مستقيما ميله يكون مقدارا موجبا يساوي (b/a) كما في الشكل الآتي (zوa) وهذا يعني أن x و y لهما نفس الإشارة الجبرية دائما. أي أما يكون كلاهما موجبا أو كلاهما سالبا. وهذه الحالة يقابلها في البصريات ما يدعى بالاهتزاز المستقطب خطيا.

2-**عندما تكون $\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}}$ فان المعادله 8 تصبح**

$$\left(\frac{x^2}{a^2}\right) + \left(\frac{y^2}{b^2}\right) = 1 \qquad 10$$

وهي معادلة القطع الناقص التي يقع محوراها الأساسيان على امتداد المحورين السيني والصادي. أن اتجاه حركة الجسيم على هذا المسار عندما $(\theta = \pi/2)$ يمكن تفسيرها كالأتي: عندما يبدأ الجسيم بالحركة في لحظة زمنية $t=0$ فان x تبدأ بالتناقص من أقصى قيمة موجبة لها، بينما y تبدأ مباشرة بالزيادة من الصفر. وهذا يعني أن المسار الناقص يحدث باتجاه معاكس لاتجاه حركة عقرب الساعة. كما مبين في الشكل الأتي (c). أما إذا كانت الزاوية $(\theta = 3\pi/2)$ فان اتجاه حركة الجسيم تكون باتجاه حركة عقرب الساعة كما مبين في الشكل الآتي (g). ويلاحظ أن المعادلة (11) تختزل إلى شكل دائري عندما تصبح $a=b$.

3.**عندما $\boldsymbol{\theta = \pi}$ فان المعادلة (8) تصبح**

$$\{(\frac{x}{a}) + (\frac{y}{b})\}^2 = 0$$

$$y = (-b/a)x \qquad 11$$

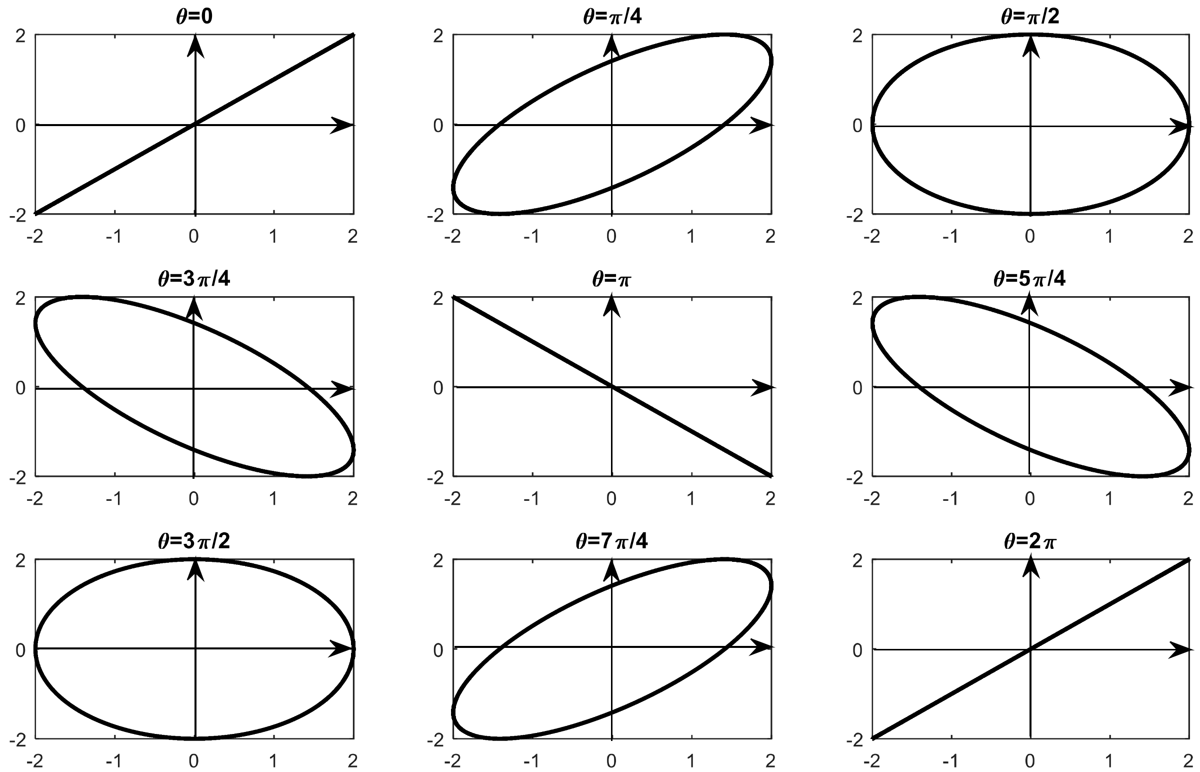
أن هذا الحل يمثل الحالة في الشكل السابق (a) لكن ميل الخط المستقيم هو مقدار سالب يساوي $(-b/a)$.

4.عندما $\theta = \pi/4, 7\pi/4$ فان المعادلة (8) تأخذ شكل قطع ناقص مائل.

فعندما تكون $\theta = \pi/4$ فان اتجاه حركة الجسيم يكون معاكسا لاتجاه حركة عقرب الساعة كما مبين في الشكل الأتي (b). والحقيقة أن هذا الشكل يمثل الحالة عندما تكون φ بين صفر و $\pi/2$ وبذلك يكون هذا الشكل وسطا بين الحالتين (a) و (c). أما عندما تكون $\theta = 7\pi/4$ فان اتجاه حركة الجسيم تكون بنفس اتجاه حركة عقرب الساعة كما مبين في الشكل الأتي (h).

5.عندما $\theta = 3\pi/4, 5\pi/4$ فان المعادلة (8) تأخذ أيضا شكل قطع ناقص مائل وتكون محصلة مسار الحركة للجسيم كما مبين في الشكل الآتي (d و f).

أن هذه السلسلة من التغييرات في شكل ليساجو تتكرر بنفس الطريقة في كل زمن دوري. من هذا نستنتج أن محصلة الحركة لتركيب أي حركتين توافقيتين بسيطتين متعامدتين لهما نفس التردد يكون مسارها على شكل قطع ناقص في جميع الحالات، على اعتبار أن الدائرة والخط المستقيم هما حالتان خاصتان من القطع الناقص.



```
%MATLAB code to plot Lissajous figures
t=0:0.001:4*pi;
a=2;
b=2;
theta1=0;
x=a*sin(t+theta1);
y=b*sin(t);
subplot(3,3,1);
plot(x,y,'linewidth',2,'color','k');
title('\theta=0')

theta11=pi/4;
x1=a*sin(t+theta11);
y1=b*sin(t);
subplot(3,3,2);
plot(x1,y1,'linewidth',2,'color','k');
title('\theta=\pi/4')

theta12=pi/2;
x2=a*sin(t+theta12);
y2=b*sin( t);
subplot(3,3,3);
plot(x2,y2,'linewidth',2,'color','k');
title('\theta=\pi/2');

theta13=3*pi/4;
x3=a*sin(t+theta13);
y3=b*sin( t);
subplot(3,3,4);
plot(x3,y3,'linewidth',2,'color','k');
title('\theta=3\pi/4');

theta14=pi;
x4=a*sin(t+theta14);
y4=b*sin( t);
subplot(3,3,5);
plot(x4,y4,'linewidth',2,'color','k');
title('\theta=\pi');

theta15=5*pi/4;
x5=a*sin(t+theta15);
y5=b*sin(t);
subplot(3,3,6);
plot(x5,y5,'linewidth',2,'color','k');
title('\theta=5\pi/4');

theta16=3*pi/2;
x6=a*sin(t+theta16);
y6=b*sin(t);
```

```
subplot(3,3,7);
plot(x6,y6,'linewidth',2,'color','k');
title('\theta=3\pi/2');

theta17=7*pi/4;
x7=a*sin(t+theta17);
y7=b*sin(t);
subplot(3,3,8);
plot(x7,y7,'linewidth',2,'color','k');
title('\theta=7\pi/4');

theta18=2*pi/1;
x8=a*sin(t+theta18);
y8=b*sin(t);
subplot(3,3,9);
plot(x8,y8,'linewidth',2,'color','k');
title('\theta=2\pi');
```

والحركة الفعلية للجسيم أما أن تتم مع اتجاه حركة عقرب الساعة أو في الاتجاه المضاد، ويتوقف ذلك على أي الحركتين تتقدم الأخرى في طورها.

مثال:موجتان تسيران باتجاهين متعامدين متمثلتان بالمعادلتين $x=a\sin(\omega t-60)$ و $y=a\sin\omega t$. أوجد محصلتيهما واتجاهما.

<u>الحل:</u>

نلاحظ من المعادلتين إن سعة الموجة الأولى $a=a$ وسعة الموجة الثانية $b=a$ وزاوية الطور الابتدائي للموجة الأولى $\theta_1 = 60^o$ وزاوية الطور الابتدائي للموجة الثانية $\theta_1 = 0^o$ ، إذن زاوية الطور للموجة المحصلة

$$\theta = \theta_1 - \theta_2$$

$$\theta = 60 - 0 = 60^o$$

وباستخدام معادلة المحصلة الناتجة من موجتين متعامدتين

$$(\frac{x^2}{a^2}) + (\frac{y^2}{b^2}) - 2(\frac{xy}{ab})cos\theta = sin^2\theta$$

$$(\frac{x^2}{a^2}) + (\frac{y^2}{b^2}) - 2\left(\frac{xy}{ab}\right) cos60 = sin^2 60$$

$$(\frac{x^2}{a^2}) + (\frac{y^2}{b^2}) - 2(\frac{xy}{ab})(\frac{1}{2}) = (\frac{\sqrt{3}}{2})^2$$

$$(\frac{x^2}{a^2}) + (\frac{y^2}{a^2}) - (\frac{xy}{a^2}) = (\frac{3}{4})$$

وتمثل معادلة المحصله قطع ناقص ، واتجاه المحصلة باتجاه معاكس لاتجاه عقرب الساعة.

H.W.

مثال:موجتان توافقيتان متعامدتان يتمثلان بالمعادلتين $x=5sin(2\pi t-5\pi/4)$ و $y=5sin2\pi t$. أوجد معادلة محصلة حركتيهما، ماهو الشرط اللازم لكي يكون شكل المحصلة بيضوي (قطع ناقص) محاورها منطبقة على المحورين الأساسيين. وماهو الشرط لكي يكون الشكل دائري.

مثال:اهتزازين متعامدين يمكن وصفهما بالمعادلتين $x=10cos5\pi t$ و $y=10cos(10\pi t+\pi/3)$ ارسم شكل ليساجو للحركة المركبة.

3- تركيب حركتين توافقيتين بسيطتين متعامدتين نسبة ترددهما كنسبة 2 إلى 1

نفرض أن لدينا جسيما يخضع لحركتين توافقيتين متعامدتين تمثلهما المعادلتين

$$x = asin(2\omega t + \theta) \qquad (1)$$

$$y = bsin\omega t \qquad (2)$$

نحاول الآن ربط المعادلتين بالتخلص من الزمن t. من المعادلة (2) نحصل على

$$(\frac{y}{b}) = sin\omega t \qquad (3)$$

ومن المعادلة ($sin^2\omega t+cos^2\omega t=1$) نجد أن

$$cos\omega t = \sqrt{(1 - sin^2\omega t)}$$

$$cos\omega t = \sqrt{(1 - (\frac{y^2}{b^2}))} \qquad (4)$$

ومن المعادلة (1) نحصل على

$$\left(\frac{x}{a}\right) = sin(2\omega t + \theta) = sin2\omega tcos\theta + cos2\omega tsin\theta \qquad (5)$$

لكن ($sin2\omega t=2sin\omega tcos\omega t$) و ($cos2\omega t=1-2sin^2\omega t$) وبالتعويض في المعادلة (5) نجد أن

$$\left(\frac{x}{a}\right) = 2sin\omega t\ cos\omega t\ cos\theta + (1 - 2sin^2\omega t)sin\theta \qquad (6)$$

بتعويض المعادلتين (3) و (4) في المعادلة (6) نحصل على

$$(\frac{x}{a}) = 2(\frac{y}{b})(1 - (\frac{y^2}{b^2}))^{1/2}cos\theta + (1 - (2(\frac{y^2}{b^2}))sin\theta \qquad (7)$$

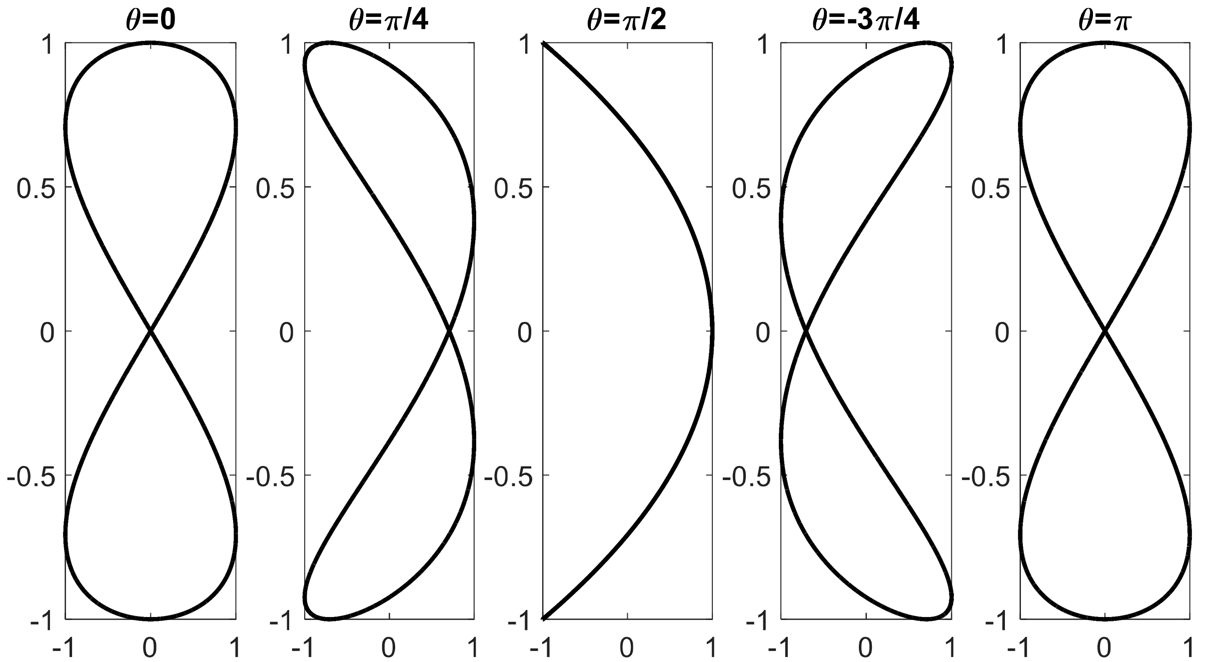
نرتب المعادلة (7) فتصبح

$$\{(\frac{x}{a}) - (1 - (2(\frac{y^2}{b^2}))sin\theta\} = 2(\frac{y}{b})\sqrt{(1 - (\frac{y^2}{b^2}))}\,cos\theta \qquad (8)$$

نربع طرفي المعادلة (8) ونبسط الحدود فتصبح المعادلة الناتجة كالآتي

$$\{(\frac{x}{a}) - sin\theta\}^2 + (4(\frac{y^2}{b^2}))\{(\frac{y^2}{b^2}) + (\frac{x}{a})sin\theta - 1\} = 0 \qquad (9)$$

أن هذه المعادلة العامة للمنحني الذي يحتوي على حلقتين مغلقتين وهي تحدد شكل المسار الذي يسلكه الجسيم لمختلف قيم θ والشكل (1) الآتي يوضح أشكال المنحنيات التي نحصل عليها عندما تأخذ θ القيم $(\pi, 3\pi/4, \pi/2, \pi/4, 0)$



س: ما هي فوائد ليساجو عمليا؟

ج:تعتبر أشكال ليساجو وسيلة لمقارنة ترددين أو الزمن الدوري لحركتين توافقيتين. ولذلك يمكن استخدامها لإيجاد قيمة التردد المجهول إذا توفر لدينا تردد معلوم. وتفيد أيضا في الكشف عن التغير في طور الحركة الناتجة من تركيب اهتزازيين متعامدين. وهناك طرق عملية عديدة للحصول على أشكال ليساجو منها طرق ميكانيكية وأخرى بصرية إلا أن أهمها على الإطلاق هي الطريقة الالكترونية باستخدام راسم ذبذبات الأشعة المهبطية.

```
%MATLAB code to plot Lissajous figures with 2*wt.
t=0:0.001:2*pi;
x=sin((2*t)+0);
y=sin(t);
 subplot(1,5,1);
plot(x,y,'linewidth',3,'color','k');
title('\theta=0')
x1=sin((2*t)+(pi/4));
y1=sin(t);
subplot(1,5,2);
plot(x1,y1,'linewidth',3,'color','k');
title('\theta=\pi/4')
x2=sin((2*t)+(pi/2));
y2=sin(t);
subplot(1,5,3);
plot(x2,y2,'linewidth',3,'color','k');
title('\theta=\pi/2')
x3=sin((2*t)+((-3*pi)/4));
y3=sin(t);
subplot(1,5,4);
plot(x3,y3,'linewidth',3,'color','k');
title('\theta=-3\pi/4')
x4=sin((2*t)+(pi));
y4=sin(t);
subplot(1,5,5);
plot(x4,y4,'linewidth',3,'color','k');
title('\theta=\pi')
```

سؤال:اثبت أن المعادلة

$$(\frac{x}{a}) - (1-(2(\frac{y^2}{b^2}))sin\theta = 2(\frac{y}{b})\sqrt{(1-(\frac{y^2}{b^2}))}\,cos\theta$$

تحقق المعادله التاليه

$$\left(\left(\frac{x}{a}\right) - sin\theta\right)^2 + \left(\frac{2y}{b}\right)^2\left[\left(\frac{x}{a}\right)sin\theta + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 1\right] = 0$$

الحل

بتربيع الطرفين نجد ان

$$\left[(\frac{x}{a}) - (1 - (2(\frac{y^2}{b^2}))sin\theta\right]^2 = \left[2(\frac{y}{b})\sqrt{(1 - (\frac{y^2}{b^2}))}\, cos\theta\right]^2$$

$$\left[\left(\frac{x}{a}\right) - sin\theta + (2\frac{y^2}{b^2})sin\theta\right]^2 = 4(\frac{y}{b})^2(1 - (\frac{y^2}{b^2}))\, cos^2\theta$$

$$\left[\left(\left(\frac{x}{a}\right) - sin\theta\right) + (2\frac{y^2}{b^2})sin\theta\right]^2 = (\frac{2y}{b})^2 cos^2\theta - (\frac{2y}{b})^4\, cos^2\theta$$

$$\left(\left(\frac{x}{a}\right) - sin\theta\right)^2 + 4\left(\left(\frac{x}{a}\right) - sin\theta\right)\left(\frac{y^2}{b^2}\right)sin\theta + 4(\frac{y}{b})^4\, sin^2\theta = (\frac{2y}{b})^2 cos^2\theta - \left(\frac{2y}{b}\right)^4\, cos^2\theta$$

$$\left(\left(\frac{x}{a}\right) - sin\theta\right)^2 + 4\left(\frac{xy^2}{ab^2}\right)sin\theta + 4\left(\frac{y}{b}\right)^4 (sin^2\theta + cos^2\theta) = \left(\frac{2y}{b}\right)^2 (cos^2\theta + sin^2\theta)$$

$$\left(\left(\frac{x}{a}\right) - sin\theta\right)^2 + 4\left(\frac{xy^2}{ab^2}\right)sin\theta + 4\left(\frac{y}{b}\right)^4 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2 = 0$$

$$\left(\left(\frac{x}{a}\right) - sin\theta\right)^2 + \left(\frac{2y}{b}\right)^2\left[\left(\frac{x}{a}\right) sin\theta + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 1\right] = 0$$