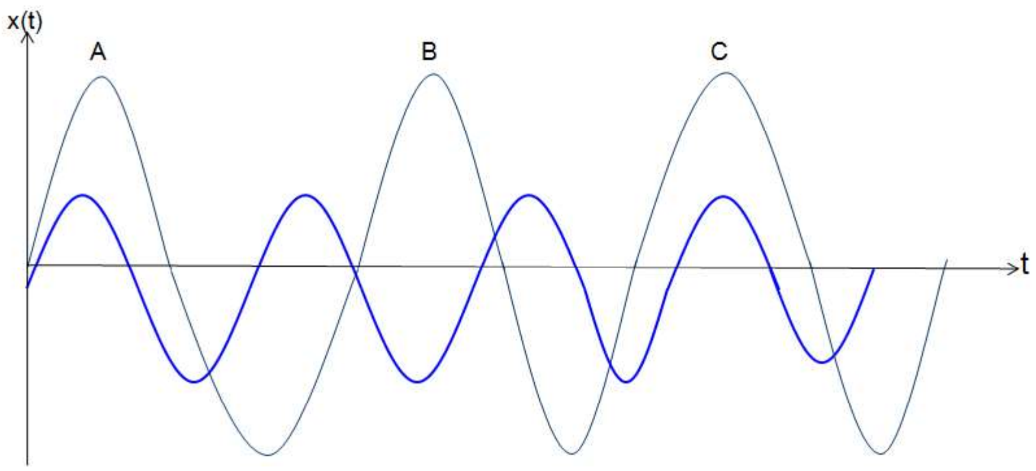
الضربات أو تركيب اهتزازيين مختلفين قليلا في التردد

عندما يتأثر جسيم آنيا بحركتين توافقيتين بسيطتين الفرق بين ترددیهما قليل فان سعة الحركة الاهتزازية الناتجة للجسيم تتناوب بين نهايتين عظمى وصغرى مع مرور الزمن وهذا النمط من الحركة الدورية يدعى بظاهرة الضربات (*Beats Phenomena*). فعندما تحدث الحركتان التوافقيتان على امتداد محور معين، فنتيجة للاختلاف الضئيل بين ترددیهما يحدث تغير تدريجي في فرق الطور بين الحركتين مع مرور الزمن. وفي لحظة زمنية معينة كتلك المقابلة للنقطة A في الشكل (1) تكون الحركتين بنفس الطور أي تحدث الإزاحتان بنفس الاتجاه وبذلك تكون سعة الحركة الاهتزازية في ذروتها، وهذا يمثل التداخل البناء، حيث تكون محصلة الإزاحة للجسيم في تلك اللحظة مساوية لمجموع الإزاحتين. وعندما يمر الزمن فان الحركتين تخرجان عن الطور ويزداد فرق الطور بينهما حتى يصبح $\pi(180^o)$ كما مبين في اللحظة الزمنية المقابلة للنقطة B في الشكل (1) حيث تكون الإزاحتان متعاكستين وتحاول كل منهما إبطال الأخرى وبذلك تكون سعة الحركة الاهتزازية في تلك اللحظة في أدنى قيمة لها، وهذا يمثل التداخل الهدام حيث تكون محصلة الإزاحة للجسيم مساوية للفرق بين الإزاحتين. ومع مرور الزمن يزداد فرق الطور بين الحركتين حتى يصبح 2π كما مبين في اللحظة الزمنية المقابلة لـC ويحدث التداخل البناء مرة أخرى ثم يعقبه بعد فترة زمنية معينة تداخل هدام. وهكذا تتكرر العملية وتتناوب محصلة سعة الحركة الإهتزازية بين أقصى وأدنى قيمة لها مع مرور الزمن بتردد ثابت يدعى تردد الضربات ويساوي الفرق بين ترددي الحركتين التوافقيتين.



ويمكن توضيح ذلك تحليليا كالآتي. نفرض أن لدينا جسيما في وسط يتذبذب تحت تأثير حركتين توافقيتين بسيطتين مختلفتين قليلا في التردد. ونتيجة لاختلاف الترددين فان فرق الطور بين الحركتين يتغير باستمرار ولذلك فانه ليس مهما في هذه الحالة تحديد قيمة ابتدائية لفرق الطور بين الحركتين. فإذا كانت الإزاحة الآنية للجسيم في الزمن t بسبب تأثير الحركة التوافقية الأولى التي سعتها A_1 وترددها f_1 هي x_1 حيث

$$x_1 = A_1 sin\omega_1 t = A_1 sin 2\pi f_1 t \qquad (1)$$

والإزاحة الآنية لنفس الجسيم في نفس اللحظة الزمنية t نتيجة تأثير الحركة التوافقية الثانية التي سعتها A_2 وترددها f_2 هي x_2 حيث

$$x_2 = A_2 sin\omega_2 t = A_1 sin 2\pi f_2 t \qquad (2)$$

إن محصلة الإزاحة x في الزمن t تنتج من تركيب الحركتين، أي أن

$$x = x_1 + x_2$$

$$x = A_1 sin\omega_1 t + A_2 sin\omega_2 t \qquad (3)$$

أن تأثير الضربات يمكن تحليله بسهولة إذا اعتبرنا الحركتين لهما نفس السعة، أي إذا افترضنا ($A=A_1=A_2$)، وبذلك تصبح المعادلة كالآتي

$$x = A sin\omega_1 t + A sin\omega_2 t \qquad (4)$$

$$x = 2A cos(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2})t \; sin(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2})t \qquad (5)$$

أن هذه المعادلة تشير إلى نتيجة رياضية بحتة وعامة لكل قيم ω_1 و ω_2 ولكن وصفها لظاهرة الضربات لا يتحقق إلا إذا كان الفرق بين ω_1 و ω_2 قليلا. أي أن

$$f_2 - f_1 = \Delta f \qquad (6)$$

حيث Δf لا يتجاوز $10Hz$. وهذا يتوقف على الفاصل الزمني بين أي ضربتين متتاليتين وقدرة الأذن البشرية على تمييز ذلك. أن المعادلة (5) يمكن تمثيلها بيانيا كما مبين في الشكل (2) فالجزء (a اللون الأحمر) يمثل الحركة التوافقية الأولى التي ترددها f_1 والجزء (b اللون الأزرق المنقط) يمثل الحركة التوافقية الثانية التي ترددها f_2 والجزء (c) يمثل محصلة تركيب الحركتين الذي يتضمن ترددين الأول عال يقع ضمن الغلاف المنقط والثاني تردد واطئ يمثله الغلاف المنقط ذاته. ويلاحظ في هذا الشكل أن السعة تتغير جيبيا، وهذه الظاهرة معروفة باسم تعديل أو تضمين السعة وهي ذات أهمية عملية في عملية الاتصالات الكهرومغناطيسية والالكترونية فضلا عن الصوتيات.

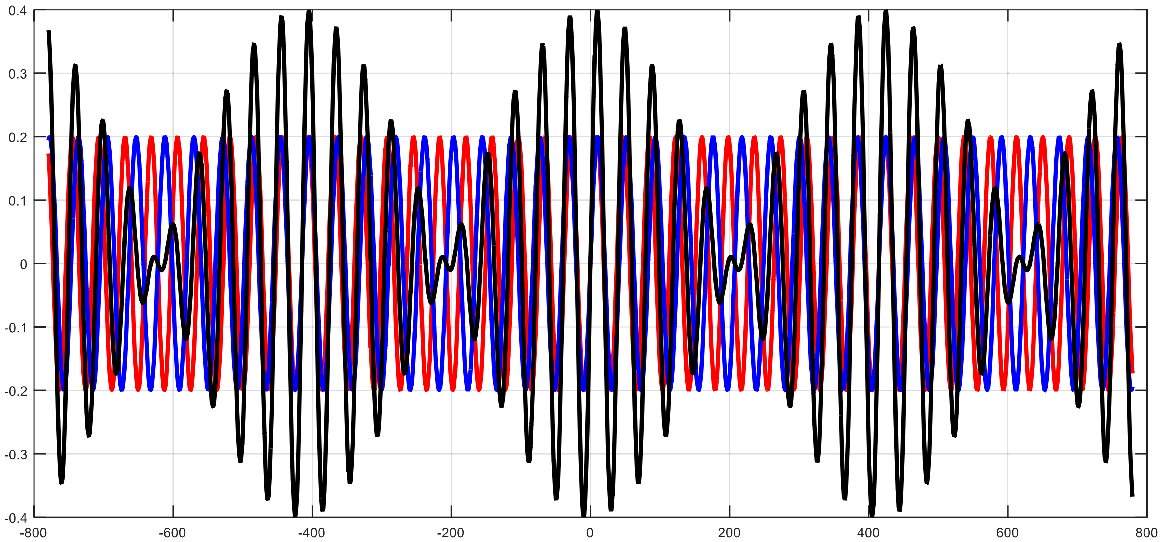
أن التفسير الفيزيائي للمعادلة (5) يمكن إعطاؤه بسهولة إذا وضعناها بالصيغة الآتية

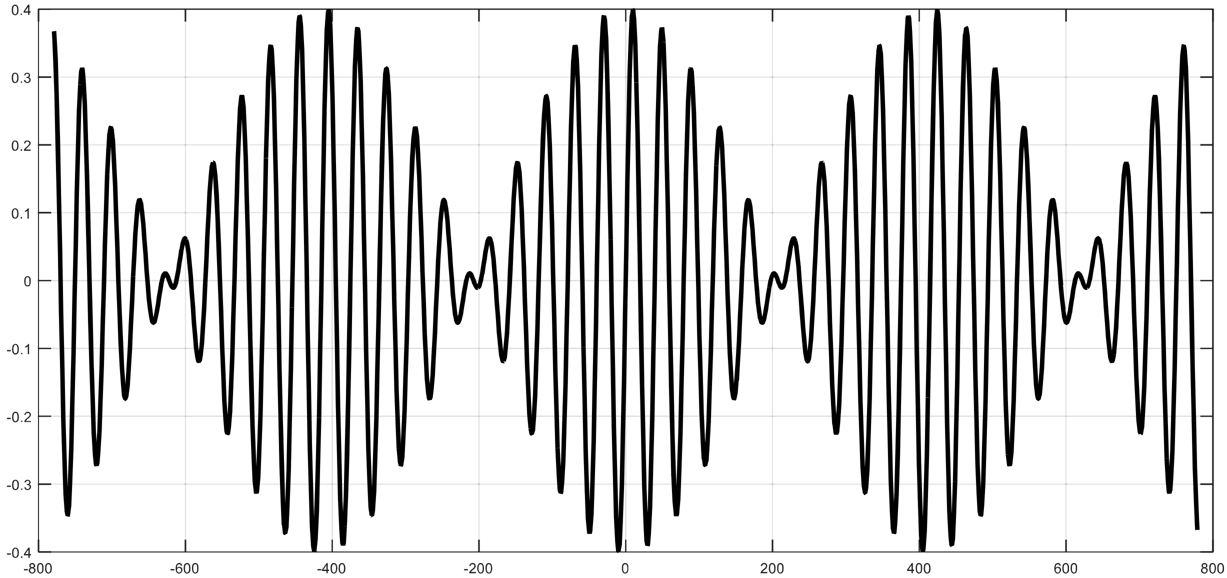
$$x = Bsin(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2})t \qquad (7)$$

حيث

$$B = 2Acos(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2})t \qquad (8)$$

فالمعادلة (7) تمثل حركة دورية سعتها B وتتذبذب بتردد عال، وهذا التردد يساوي المتوسط الحسابي للترددين الأصليين أي $(f_1+f_2/2)$ والذي يمثل التردد الفعلي لمحصلة الحركة ويقع ضمن الغلاف المنقط المبين في الشكل (2). والعامل المتذبذب $sin(\omega_2+\omega_1/2)t$ تقع قيمته دائما بين الحدين ± 1. والمعادلة (8) تعطي سعة الحركة B. ويلاحظ أنها تتغير دوريا مع الزمن.





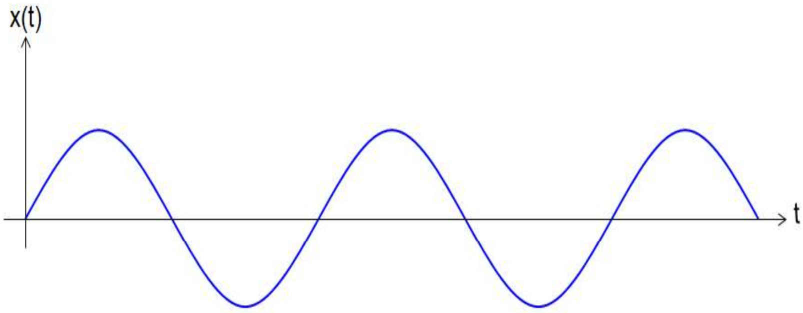

```
% MATLAB code to plot beats
t=-248*pi:0.001:248*pi;
a=0.2;
b=0.2;
f1=t/6;
f2=t/(6*1.1);
x1=a*sin(f1);
x2=b*sin(f2);
x3=x1+x2;
  plot(t,x1,'linewidth',2,'color','r');
hold on
  plot(t,x2,'linewidth',2,'color','b');
hold on
plot(t,x3,'linewidth',2,'color','k');
grid on
```

الفصل الرابع

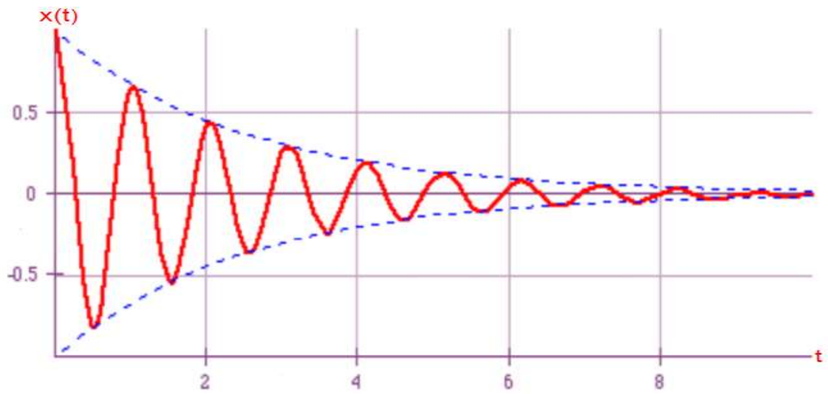
الاهتزاز المضمحل

مقدمة

لقد اعتبرنا في دراستنا للحركة التوافقية البسيطة في الفصل الثاني أن الاهتزاز حر وغير مضمحل (*Damped*). وهو الاهتزاز الحاصل من إزاحة الجسيم قليلا عن موضع توازنه ومن ثم تركه يهتز بصورة حرة تحت تأثير قوة الاستعادة الناتجة من خاصية المرونة فقط، دون أن يعاني أي مقاومة خارجية آو تبديد في الطاقة مهما كان شكله. ونتيجة ذلك فان سعة الحركة الاهتزازية تبقى ثابتة مما يعني أن الاهتزاز يستمر دون توقف مع مرور الزمن كما مبين في الشكل (1).



وفي الحقيقة أن مثل هذا الاهتزاز يمثل حالة مثالية تماما إذ لا يوجد مهتز حقيقي يستمر على الاهتزاز الحر إلى الآبد. وفي الواقع أن أي مهتز حقيقي لابد أن يعاني شيئا من الفقدان في الطاقة بشكل آو بآخر. ونتيجة ذلك فان سعة الحركة الاهتزازية تتضاءل تدريجيا مع مرور الزمن كما مبين في الشكل (2). أن مثل الاهتزاز يدعى بالاهتزاز المضمحل الذي يمثل حالة أكثر واقعية من الاهتزاز غير المضمحل.



القوى المسببة لاضمحلال الاهتزاز

بصورة عامة يمثل الاهتزاز بحد ذاته شكلا من الضياع بالطاقة غير مرغوب فيه في كثير من الأحيان لأسباب متعددة، منها على سبيل المثال انه قد يكون سببا في انهيار الأجزاء المهتزة، أو في توليد أصوات مزعجة أو في نقل قوى وحركات غير مطلوبة إلى أجزاء أو أجسام أخرى قريبة. لهذا السبب يمكن اعتبار أن الطاقة المصاحبة للاهتزاز تستهلك بشكل أو بأخر. وفي الواقع أن كل جسيم مهتز يجابه نوعا من القوى المقاومة لحركته والتي تؤدي إلى اضمحلال حركته الاهتزازية تدريجيا مع الزمن وقد يكون مقدار هذه القوى من الكبر مالا يسمح بحدوث الاهتزاز أصلا. ومن الصعب وصف القوى الحقيقية المؤدية إلى تبديد الطاقة المصاحبة للاهتزاز. إلا انه بالتأكيد يمكن حصر القوة المقاومة لحركة الجسيم المهتز بعامل أو أكثر من عوامل الاضمحلال التي قد تكون ناتجة من لزوجة المائع (كالهواء أو السائل) الذي يتحرك خلاله الجسيم المهتز أو الاحتكاك الداخلي بين الجزيئات التي تعاني حركة نسبية نتيجة الاهتزاز أو قوى كهربائية ستاتيكية كتلك الناتجة عن الاحتكاك الجاف (احتكاك كولومب لتوليد الشحنات الساكنة) أو قوى محتثة ناتجة من الحث الكهرومغناطيسي المتولد بسبب اهتزاز المهتز الذي يحتوي مواد قابلة للتمغنط قرب مغناطيس طبيعي أو كهربائي. إن واحدا أو أكثر من هذه العوامل أو غيرها موجود دائما في أي عملية اهتزاز، لذلك فان شغلا يجب أن يصرف دائما للتغلب عليها، وهذا الشغل المصروف يتبدد تدريجيا على شكل حرارة مفقودة إلى الوسط المحيط بالمهتز. إن هذا التضاؤل في السعة يعرف بالاضمحلال أو التبديد في الطاقة. ومثل هذه الحركة الاهتزازية تدعى بالحركة التوافقية المضمحلة. إن جميع المهتزات في الطبيعة التي تهتز اهتزازا حرا تعاني هذا النوع من الاهتزاز ولكن بدرجات متفاوتة. فالبندول البسيط المهتز في الهواء يعاني مقاومة قليلة نسبيا لذلك فان سعته تتضاءل تدريجيا بمقدار ضئيل وعليه يستمر على الاهتزاز لفترة طويلة نسبيا إذا ما ترك يهتز اهتزازا حرا. ولكن إذا ما غمر البندول المهتز في الماء فان المقاومة التي يعانيها تصبح كبيرة لذلك فان سعته تتضاءل بمقدار ملحوظ تماما وعليه فانه يتوقف عن الاهتزاز بعد فترة قصيرة جدا، أما إذا غمر في سائل عالي اللزوجة كالعسل مثلا فانه لا يهتز بل يرجع إلى موضع توازنه الأصلي إذا ما أزيح عن ذلك الموضع وترك حرا. ونفس الشيء يحدث لأي مهتز آخر إذا ما تعرض إلى نفس الشروط.

والحقيقة إن أي جسم يهتز في وسط ما كالهواء مثلا يفقد بالضرورة طاقة. فأثناء عملية الاهتزاز فان جزيئات الهواء المحيطة به تهتز أيضا والطاقة الاهتزازية التي اكتسبتها هذه الجزيئات تمثل جزء من الطاقة التي فقدها الجسم المهتز. والحقيقة إن الصوت المنبعث من أي جسم مهتز كالشوكة الرنانة مثلا يمثل الطاقة الاهتزازية المنقولة عبر الهواء إلى آذاننا وهذه الطاقة تمثل شكلا من أشكال الطاقة المستنزفة من الجسم المهتز.

ولغرض دراسة الاهتزاز المضمحل دراسة وافية لابد من اخذ كل قوى التبديد في الاعتبار، ولكن ليس من السهل حصر كل عوامل التبديد بالطاقة خاصة وان قوى التبديد قد تعتمد على عوامل عديدة ومختلفة مثل الإزاحة، السرعة، الإجهاد ... الخ. لذلك ستقتصر دراستنا في هذا الفصل على اعتبار أكثر العوامل بروزا في إحداث الاضمحلال في حركة المهتز. وهذا العامل ناتج من مقاومة المائع بسبب لزوجته لحركة الجسيم.

إن مقدار المقاومة التي يبديها المائع لحركة الجسيم تعتمد على سرعة الجسيم وشكله وخواص المائع. وبالنسبة لجسيم ما يتحرك في مائع معين تختلف العلاقة بين قوة مقاومة المائع لحركة الجسيم باختلاف السرعة. فعند السرع العالية يكون مقدار القوة المقاومة متناسب طرديا مع مربع السرعة تقريبا. وعند السرع الواطئة أو الاعتيادية يكون مقدار القوة المقاومة F_R متناسب خطيا مع السرعة الآنية v للجسيم المهتز. ويمكن التعبير عن ذلك رياضيا بالتناسب

$$F_R \alpha v$$

ومن هذا التناسب ينتج أن

$$F_R = -Rv \qquad (1)$$

حيث R يمثل ثابت التناسب ويدعى بثابت المقاومة أو ثابت الاضمحلال. والإشارة السالبة تشير إلى أن اتجاه القوة المقاومة يكون دائما معاكسا لاتجاه حركة الجسم. وهذا يعني أن هذه القوة تحاول دائما إبطاء حركة الجسيم المهتز.

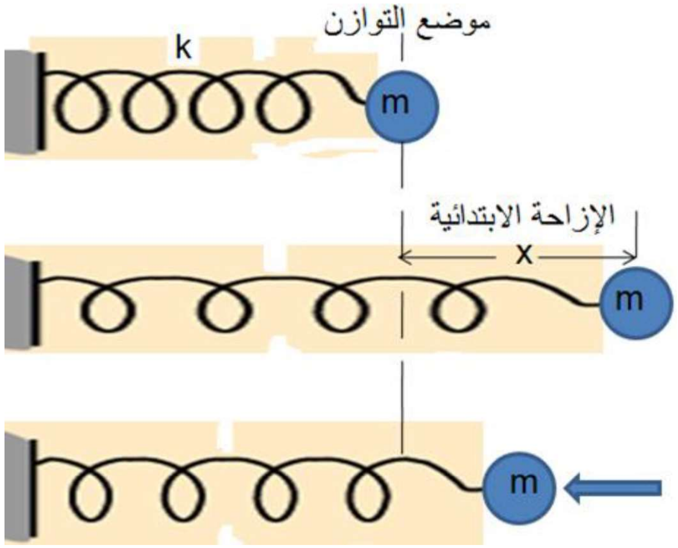
ويمكن أن نعبر عن السرعة الآنية v للجسيم بالمقدار dx/dt إذا كان الجسيم يتحرك باتجاه المحور السيني، وتصبح المعادلة (1) كالاتي

$$F_R = -R(\frac{dx}{dt}) \qquad (2)$$

إن العلاقة الخطية إلى جانب كونها تمثل حالة ليست بعيدة عن الواقع فإنها تقود إلى ابسط التحليلات الرياضية فيما يتعلق بالاهتزاز المضمحل، لذلك ستقتصر دراستنا في هذا الفصل على اعتبار إن القوة المقاومة التي يعانيها الجسيم المهتز والناجمة عن اللزوجة أو الاحتكاك تتناسب طرديا مع السرعة الآنية للجسيم.

معادلة الحركة التوافقية المضمحلة

سنعتبر هنا حركة المهتز المؤلف من جسيم كروي كتلته m متصل بنابض حلزوني ثابت مرونته k ومثبت طرفه بأحكام بمسند ثابت كما مبين في الشكل (3).



الشكل (3) يبين مهتز توافقي تؤثر عليه قوتان هما قوة الاستعادة وقوة مقاومة المائع

عندما تزاح الكتلة m إزاحة صغيرة مقدارها x فان قوة استعادة تظهر مقدارها $(-kx)$، وحينما تترك الكتلة فأنها تتحرك للعودة إلى موضع توازنها وخلال حركتها تعاني قوة مقاومة ناتجة من الاحتكاك أو لزوجة المائع ومقدار هذه القوة هو $(-R(dx/dt))$ حيث الإشارة السالبة تشير إلى أن اتجاه هذه القوة يعاكس دائما اتجاه السرعة النسبية للكتلة المهتزة. أن محصلة القوة المؤثرة على الكتلة المتحركة في أية لحظة زمنية t هي $\left(-R\left(\frac{dx}{dt}\right)\right) - kx$) والآن نطبق قانون نيوتن الثاني في الحركة فينتج

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = -R\left(\frac{dx}{dt}\right) - kx \qquad (1)$$

نقسم طرفي المعادلة (1) على m ونرتب الحدود فتصبح

$$(\frac{d^2x}{dt^2}) + (\frac{R}{m})(\frac{dx}{dt}) + (\frac{k}{m})x = 0 \qquad (2)$$

ولتسهيل شكل الحل للمعادلة (2) نفرض أن $2r=R/m$، ولما كانت $\omega^2=k/m$ فان المعادلة (2) تصبح

$$(\frac{d^2x}{dt^2}) + 2r\left(\frac{dx}{dt}\right) + w^2x = 0 \qquad (3)$$

هذه هي المعادلة التفاضلية للحركة التوافقية الحرة المضمحلة، ويلاحظ أنها معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية.

حل معادلة الحركة التوافقية المضمحلة

بالنظر لعدم إجراء تكامل مباشر للمعادلة (3) لذلك يجب البحث عن الحل المناسب بطريقة أخرى. وبالتخمين نجد أن الحل المطلوب يجب أن يكون دالة تعطي نفس الشكل الرياضي لكل الحدود فيها. والدالة المناسبة لذلك هي الدالة التي يكون شكل المشتقة الأولى والثانية لها مشابها تماما للدالة ذاتها. والدالة الرياضية التي تتوفر فيها هذه الشروط هي الدالة الآسية $e^{\alpha t}$، وعليه يمكن أن نفرض أن الحل المناسب هو

$$x = De^{\alpha t} \qquad (1)$$

حيث D ثابت اختياري، نعوض هذا الحل في المعادلة (3) في الفقرة السابقة، فينتج

$$\left(\frac{d^2De^{\alpha t}}{dt^2}\right) + 2r\left(\frac{dDe^{\alpha t}}{dt}\right) + w^2De^{\alpha t} = 0$$

$$\alpha^2De^{\alpha t} + 2r\alpha De^{\alpha t} + \omega^2De^{\alpha t} = 0 \qquad (2)$$

والمعادلة (2) تصبح

$$De^{\alpha t}\,(\alpha^2 + 2r\alpha + \omega^2) = 0 \qquad (3)$$

وهذا يعني أما $De^{\alpha t}=0$ وهذا غير ممكن لأنه يمثل الحل المفروض ولا يساوي صفرا إلا إذا كانت قيمة المتغير t تساوي مقدارا سالبا لانهائيا في الكبر. أو أن $\alpha^2+2r\alpha+\omega^2=0$ والطريقة المناسبة لحل هذه المعادلة هي باستخدام الدستور

$$\alpha = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad (4)$$

وبالتعويض نجد أن