$$\alpha = \frac{-2r \pm \sqrt{(4r^2 - 4\omega^2)}}{2} \qquad (5)$$

أن المعادلة (5) تشير إلى أن هنالك حلين للمعادلة هما

$$\alpha_1 = -r + \sqrt{(r^2 - \omega^2)}$$

$$\alpha_2 = -r - \sqrt{(r^2 - \omega^2)}$$

وبتعويض النتيجتين السابقتين في المعادلة (1) نجد أن الحل العام لمعادلة الحركة هو

$$x = D_1 e^{\alpha_1 t} + D_2 e^{\alpha_2 t} \qquad (6)$$

أي أن

$$x = D_1 e^{-r+\sqrt{(r^2-\omega^2)}t} + D_2 e^{-r-\sqrt{(r^2-\omega^2)}t} \qquad (7)$$

حيث أن D_1 و D_2 يمثلان ثابتين اختياريين يمكن ايجادهما من الشروط الابتدائية للحركة. ومعلوم أن الحل العام لمعادلة تفاضلية من الرتبة الثانية يجب أن يتضمن ثابتين اختياريين. أن التفسير الفيزيائي للمعادلة (7) يشير إلى وجود أربع حالات للحركة كل منها يعتمد على قيمة r بالنسبة لـω وهذه الحالات هي

1. **<u>الحالة الأولى: وهي تمثل حالة انعدام الاضمحلال ($r=0$)</u>**

وهذه الحالة تعني أن المقاومة التي يعانيها المهتز خلال حركته معدومة تماما أي أن ($R=0$) وهذه الحالة تقابل الحركة التوافقية البسيطة غير المضمحلة. في هذه الحالة يصبح الحل للمعادلة (7) كالآتي

$$x = D_1 e^{+\sqrt{-\omega^2}t} + D_2 e^{-\sqrt{-\omega^2}t} \qquad (8)$$

$$x = D_1 e^{+i\omega t} + D_2 e^{-i\omega t} \qquad (9)$$

حيث أن i يمثل عدد خيالي ويساوي $\sqrt{-1}$. ولكن لدينا

$$e^{i\omega t} = coswt + i\, sinwt \qquad (10)$$

$$e^{-i\omega t} = coswt - i\, sinwt \qquad (11)$$

نعوض المعادلتين (10) و (11) في المعادلة (9) فنجد أن

$$x = D_1(cos\omega t + isin\omega t) + D_2(cos\omega t - isin\omega t)$$

$$x = (D_1 + D_2)cos\omega t + i(D_1 + D_2)sin\omega t \qquad (12)$$

فإذا فرضنا أن $A=(D_1+D_2)$ و $B=i(D_1-D_2)$ فبالتعويض في المعادلة (12) نجد أن الحل الأخير يصبح

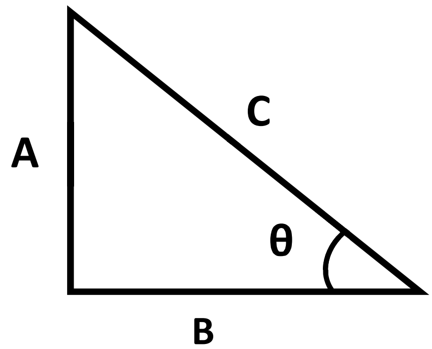
$$x = Acos\omega t + Bsin\omega t \qquad (13)$$

و هذا الحل يمكن تبسيطه أكثر إذا ضربنا وقسمنا الطرف الأيمن على المقدار C، حيث $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ وان $tan\theta = \frac{A}{B}$ فعندئذ يصبح الحل الأخير كالآتي

$$x = C\{(A/C)cos\omega t + (B/C)sin\omega t\}$$

$$x = C(sin\theta cos\omega t + cos\theta sin\omega t)$$

$$x = Csin(\omega t + \theta) \qquad (14)$$



حيث أن θ تمثل زاوية الطور الابتدائي للحركة وتساوي $arctan(A/B)$. إن هذه المعادلة تمثل الحركة التوافقية البسيطة وتشير إلى أن سعة الحركة خلال الاهتزاز تبقى ثابتة مع مرور الزمن.

2.الحالة الثانية: وهي تمثل حالة الحركة الناقصة الاضمحلال ($r^2<\omega^2$)

هذه الحالة تعني أن المقاومة التي يعانيها المهتز خفيفة أي أن الاضمحلال في الاهتزاز قليل نسبيا فعندما يكون معامل الاضمحلال r صغيرا بالمقارنة مع التردد الزاوي ω فان المقدار تحت الجذر $(r^2-\omega^2)^{1/2}$ يكون سالبا وبالتالي يكون الجذر مقدار خيالي. ونفرض انه في حالة $r<\omega$ أن $(r^2-\omega^2)^{1/2}=i\omega_o$، حيث أن ω_o تمثل التردد الزاوي المضمحل. نعوض في المعادلة (7) فيصبح الحل كالآتي

$$x = D_1 e^{(-r+iw_o)t} + D_2 e^{(-r-iw_o)t}$$

$$x = e^{-rt}(D_1 e^{iw_o t} + D_2 e^{-iw_o t}) \qquad (15)$$

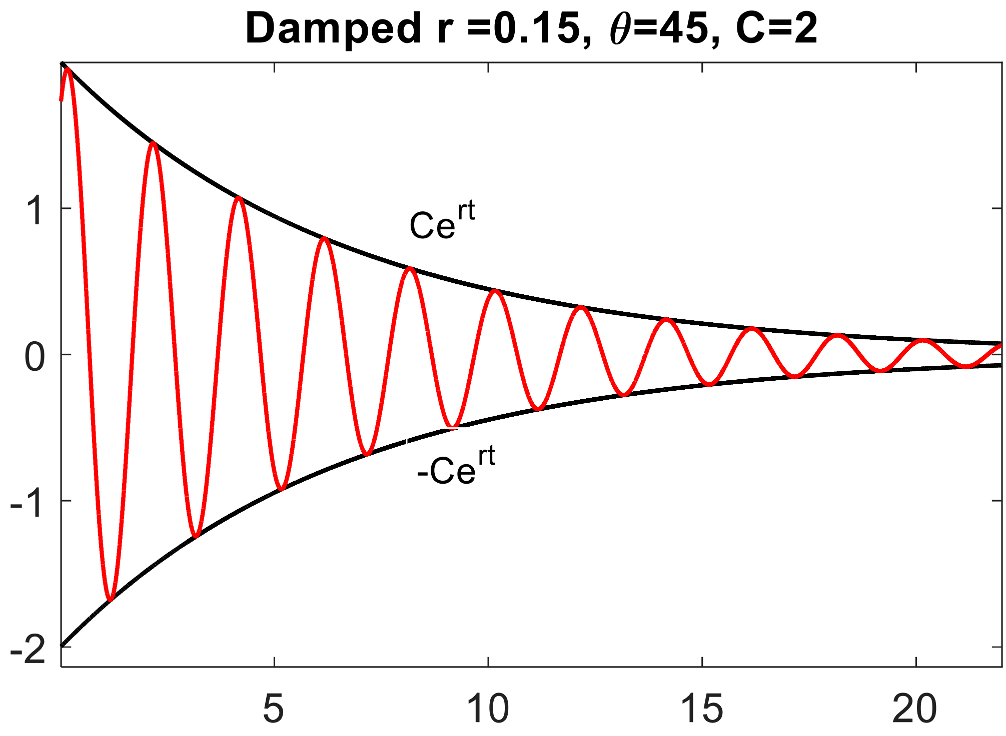
وبنفس الطريقة التي تم إتباعها في الحالة الأولى تماما يمكن إثبات أن

$$D_1 e^{iw_o t} + D_2 e^{-iw_o t} = C sin(w_o t + \theta) \qquad (16)$$

وبذلك يصبح الحل العام في هذه الحالة كالآتي

$$x = Ce^{-rt} sin(w_o t + \theta) \qquad 17)$$

حيث أن C,θ ثابتان اختياريان يمكن إيجاد قيمتهما من الشروط الابتدائية للحركة. أن هذه المعادلة تمثل الحركة التوافقية البسيطة المضمحلة ويمكن تمثيلها بيانيا كما مبين في الشكل (4).



الشكل (4) يبين منحني الإزاحة والزمن في الاهتزاز المضمحل

```
% MATLAB code to plot damped figures
t=0:0.001:7*pi;
c=2;
r=0.15;
theta=45;
a=exp(-r*t);
x=c*a;
x1= c*(sin((t*pi)+theta)).*a;
plot(t,x,'linewidth',2,'color','k');
hold on
plot(t,-x,'linewidth',2,'color','k');
hold on
plot(t,x1,'linewidth',2,'color','r');
title('Damped r =0.15, \theta=45, C=2' )
```

في الشكل السابق يتضح أن سعة الحركة تتضاءل مع الزمن. وهذه السعة يمكن تحديدها عندما تكون قيمة $sin(\omega_o t+\theta)$ في أقصى قيمة لها، أي عندما $sin(\omega_o t+\theta)=\pm 1^*$ وبذلك تكون السعة الفعالة للحركة هي $\pm Ce^{-rt}$. ويلاحظ أنها مقدار متغير ويعتمد على عامل الاضمحلال r والزمن t. وهذه تشير إلى أن السعة تتناقص أسيا مع الزمن حتى تنعدم عندما تكون قيمة t مالانهاية. إن هذه الحالة تعني أن المقاومة التي يعانيها المهتز قليلة لدرجة تسمح بحدوث اهتزازات حول موضع التوازن، على الرغم من سعة هذه الاهتزازات تتناقص مع الزمن كما هو مبين في الشكل السابق. أن الفرق في الزمن الذي يفصل بين قمتين (أو قعرين) متتاليين يسمى الزمن الدوري للاهتزاز الحر المضمحل ويرمز له عادة بالرمز T_o ويمكن إيجاده من العلاقة

$$\sqrt{(r^2-\omega^2)} = i\omega o$$

التي منها نجد أن

$$\omega_o = \sqrt{(\omega^2 - r^2)} \qquad (18)$$

وحيث أن $\omega_o=2\pi/T_o$ لذلك فان

$$T_o = \frac{2\pi}{\sqrt{(\omega^2 - r^2)}} \qquad (19)$$

وبالمقارنة مع الزمن الدوري للاهتزاز الحر غير المضمحل $T=2\pi/\omega$ نجد أن T_o تكون دائما اكبر من T وهذا يعني أن المقاومة التي يعانيها الجسيم المهتز تعمل على إبطاء حركته، وكلما ازدادت المقاومة الاحتكاكية المقاسة بدلالة معامل الاضمحلال r ازداد طول الزمن الدوري T_o، حتى إذا أصبحت قيمة r مساوية لقيمة ω أصبح طول الزمن الدوري T_o مالانهاية من الكبر مما يعني أن الحركة لن تكون اهتزازية على الإطلاق بل أن الجسيم سيعود إلى موضع توازنه الأصلي إذا ترك حرا بعد أي إزاحة ابتدائية. مما تقدم يتضح أن وجود مقاومة قليلة أمام أي مهتز يؤدي إلى اضمحلال الاهتزاز وهذا يظهر على شكل تأثيرين أولهما تناقص تدريجي في السعة وثانيهما زيادة في طول الزمن الدوري وهذان التأثيران مرتبطان بالمعادلتين (17) و (19). إن هذا النوع من الاهتزاز يمثل اغلب حالات الاهتزاز في الطبيعة، وفيه تتبدد الطاقة تدريجيا نتيجة المقاومة التي يعانيها المهتز حتى تنعدم الحركة ويتوقف تماما عن الاهتزاز.

عندما $sin(\omega_o t+\theta)=\pm 1^*$ فان المنحني المتذبذب (الخط البياني المتصل) في الشكل السابق يتلامس مع المنحني الآسي Cr^{-rt} (الخط البياني المنقط) في نقاط لا تتطابق مع مواقع أقصى قيم السعة بل تميل قليلا نحو اليمين، ولذلك لا تكون المماسات في تلك النقاط في وضع أفقي مواز لمحور الزمن. وتوخيا للدقة يمكن تحديد مواقع أقصى قيمة لـx من إيجاد مشتقة الإزاحة x بالنسبة للزمن t ومن ثم تطبيق شروط القيم العظمى. وعموما

يكون الاختلاف بين الحالتين من الصغر ما يمكن إهماله. لذلك يمكن اعتبار قيمة السعة في نقطة التماس مساوية لأقصى قيمة للسعة.

3.الحالة الثالثة: وهي تمثل حالة الحركة الحرجة ($r^2=\omega^2$)

أن هذه الحالة الخاصة تمثل الحد الفاصل بين سلوكين مختلفين تماما للمهتز. السلوك الأول هو سلوك اهتزازي ويبدأ عندما تقل قيمة r قليلا عن قيمة ω وهذه الحالة قد تمت دراسته في البند السابق. والسلوك الثاني هو سلوك غير اهتزازي ويحدث عندما تكون قيمة r مساوية أو تزيد عن قيمة ω وفي هذا البند سنحلل الحالة عندما $\omega=r$ وفي البند القادم سنحلل الحالة عندما $\omega<r$. ذا عوضنا $\omega^2=r^2$ في الحل العام المعادلة (7) لمعادلة الحركة نحصل على حدين متماثلين تماما ويكون الحل الناتج كالآتي

$$x = D_1e^{-rt} + D_2e^{-rt}$$

$$x = (D_1 + D_2)e^{-rt}$$

$$x = De^{-rt}$$

حيث أن D يساوي (D_1+D_2). أن هذا الحل يحتوي على ثابت اختياري واحد. بينما معادلة الحركة هي من الرتبة الثانية وحلها العام يجب أن يتضمن ثابتين اختياريين لكي يفيا بالشرطين الابتدائيين للحركة. لهذا الغرض سنحاول إيجاد الحل المناسب الذي يحتوي على ثابتين اختياريين لذلك سنلجأ إلى الحالة السابقة (حالة الحركة الناقصة الاضمحلال ونفرض أن معامل الاضمحلال r يزداد تدريجيا حتى يقترب حديا من ω أي أن $(r^2-\omega^2)^{1/2}$ تقترب من الصفر. فإذا فرضنا أن $(r^2-\omega^2)^{1/2}=i\delta\omega_o$.حيث أن $\delta\omega_o\rightarrow 0$ فإننا لن نبتعد كثيرا عن شرط هذه الحالة أي أن ($r^2=\omega^2$) وفي أي زمن محدد t ستكون قيمة $\delta\omega_o t$ صغيرة جدا. نعوض ذلك في المعادلة (7) التي تمثل الحل العام فينتج.

$$x = D_1e^{(-r+i\delta w_o)t} + D_2e^{(-r-i\delta w_o)t}$$

$$x = e^{-rt}(D_1e^{\,i\delta w_o t} + D_2e^{-i\delta w_o t})$$

وبنفس الطريقة التي اتبعناها في الحالة الأولى يمكن إثبات أن

$$D_1e^{\,i\delta w_o t} + D_2e^{-i\delta w_o t} = A\cos\,\delta w_o t + B\sin\,\delta w_o t$$

حيث أن أن $A=(D_1+D_2)$ و $B=i(D_1-D_2)$ وبذلك يصبح الحل في هذه الحالة هو

$$x = e^{-rt}(A\cos\,\delta w_o t + B\sin\,\delta w_o t) \qquad (20)$$

ولكن $\delta\omega_o t \to 0$ لذلك يمكن إجراء التقريبات التالية بدرجة عالية من الدقة $\sin\delta\omega_o t \approx \delta\omega_o t,\ \cos\delta\omega_o t \approx 1$ نعوض في المعادلة (20) فنجد أن

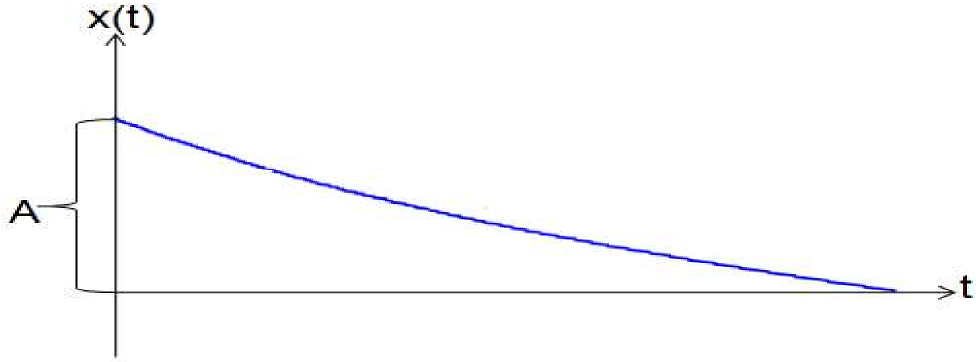
$$x = e^{-rt}(A + B\delta w_o t)$$

فإذا اعتبرنا $\acute{B} = B\delta w_o$ فان الحل العام في هذه الحالة يصبح

$$x = e^{-rt}(A + \acute{B}t) \qquad (21)$$

حيث$A, \acute{B}$ يمثلان ثابتين اختياريين يمكن ايجادهما من الشروط الابتدائية للحركة. ويلاحظ من أن هذا الحل يمثل الحالة الحدية للمعادلة (7) عندما يزداد معامل الاضمحلال r مقتربا من قيمة ω أي عندما يقترب الزمن الدوري T_o للاهتزاز المضمحل من المالانهاية أي $T_o \to \infty$. ويمكن التأكد من صحة هذا الحل التجريبي بتعويضه في معادلة الحركة (3) فنجد أن الطرفين متطابقان.

أن هذا الحل يصف حركة الجسيم في الحالة الحرجة ويمكن تمثيله بيانيا كما مبين في الشكل (5)



الشكل (5) يبين حركة الجسيم في الحالة الحرجة إذا أزيح إزاحة ابتدائية مقدارها A ثم ترك حرا

يلاحظ من هذا الشكل أن الجسيم يعود إلى موضع توازنه الأصلي إذا ترك حرا بعد أزاحته إزاحة ابتدائية مقدارها A وهذا يشير إلى أن الحل لا يصف أي سلوك اهتزازي للجسيم مما يعني أن المقاومة الاحتكاكية كبيرة إلى الحد الذي يمنع حدوث الاهتزاز أي أن $(\omega^2 = r^2)$ أما إذا كانت المقاومة الاحتكاكية بدلالة عامل الاضمحلال r اكبر من ذلك أي أن $(\omega^2 < r^2)$ فان المقاومة الاحتكاكية تصبح اكبر بالمقدار وتمنع أي سلوك اهتزازي للجسيم وتبطئ حركته بشكل يستغرق زمنا أطول للعودة إلى موضع توازنه إذا ما ترك بعد إزاحته عن موضع توازنه وهذه الحالة سيتم دراستها بتفصيل أكثر في البند القادم، أما إذا كانت المقاومة الاحتكاكية بدلالة عامل الاضمحلال r اقل من ذلك أي أن $(\omega^2 > r^2)$ فعندئذ ينتقل المهتز إلى الحالة التي سبق دراستها في البند السابق.

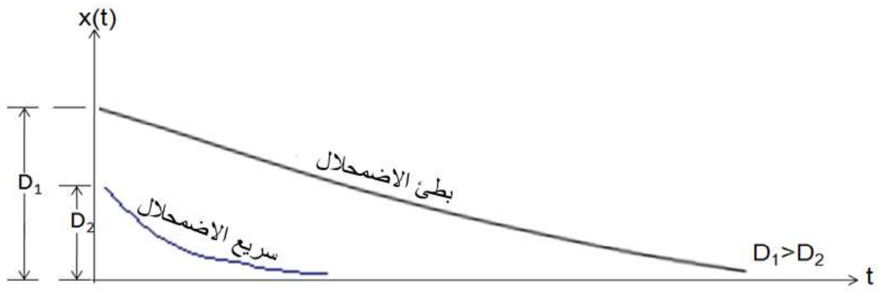
من هذا يتضح أن الحالة الحرجة تعني عودة الجسيم إلى موضع توازنه بأقل فترة زمنية إذا ما أزيح عن موضع توازنه وترك حرا دون أن يصاحب ذلك سلوك اهتزازي. أما إذا أزيح الجسيم عن موضع التوازن فان الجسيم يتجاوز موضع التوازن إلى الجهة الأخرى ثم يعود إلى موضع توازنه بأقل فترة زمنية دون أن يتذبذب. إن لحالة الحركة الحرجة أهمية عملية كبيرة في تصميم أجهزة القياس العملية التي تتضمن أجزاء متحركة كالمؤشرات في أجهزة القياس الكهربائية مثل الكلفانومترات والاميترات والفولتميترات وغيرها. حيث يعاني المؤشر قوة دفع مفاجئة بعد غلق مفتاح الدائرة الكهربائية مباشرة. فإذا لم يكن معامل الاضمحلال مناسبا فان المؤشر أما يهتز حول موضع توازنه إذا كان ($\omega^2>r^2$) أو يتحرك المؤشر ببطء نحو موضع التوازن إذا كانت ($\omega^2<r^2$) وكلا الحالتين غير مرغوب فيها. أما إذا كانت ($\omega^2=r^2$) فان المؤشر يصل نقطة توازنه بسرعة وبدون أن يتذبذب حول تلك النقطة مما يتيح اخذ قراءة صحيحة وسريعة حال ربط جهاز القياس بالدائرة.

4. الحالة الرابعة: وهي تمثل حالة الحركة الزائدة الاضمحلال ($r^2>\omega^2$)

في هذه الحالة يعاني المهتز مقاومة احتكاكية شديدة وتكون قيمة معامل الاضمحلال r كبيرة بالمقارنة مع التردد الزاوي الطبيعي للمهتز ω. مما يعني أن المقدار تحت الجذر $(r^2-\omega^2)^{1/2}$ يكون مقدار حقيقي موجب وبذلك يكون الحل العام للمعادلة (7) لهذه الحالة كالآتي

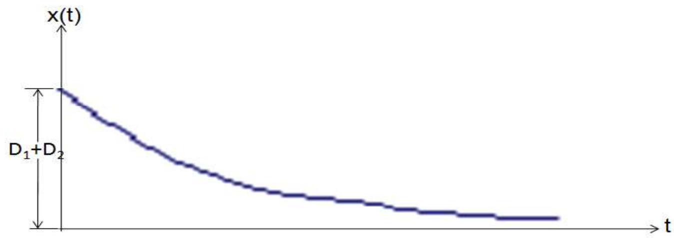
$$x = e^{-rt}\left(D_1 e^{+\sqrt{(r^2-\omega^2)}t} + D_2 e^{-\sqrt{(r^2-\omega^2)}t}\right) \qquad (22)$$

حيث أن D_1 و D_2 يمثلان ثابتين اختياريين يمكن ايجادهما من الشروط الابتدائية للحركة. يلاحظ في هذه المعادلة أنها لا تحتوي على عامل تتذبذب قيمته مع الزمن مما يشير إلى أن المهتز لا يسلك سلوك اهتزازي. أن هذا الحل يتكون من جزئين أولهما يتمثل بالحد الأول الذي يمثل الجزء البطئ الاضمحلال والحد الثاني يمثل الجزء السريع الاضمحلال كما مبين في الشكل (6).



الشكل (6) يبين أن معدل تغير الإزاحة مع الزمن يختلف في الحدين الذي يتكون منهما الحل العام المعادلة (22).

إن الحركة الفعلية للمهتز يمثلها مجموع هذين الجزئين الذي يمكن تمثيله بيانيا كما مبين في الشكل (7). أن هذا الشكل يشير إلى انه لو أزيح الجسيم إزاحة ابتدائية مقدارها (D_1+D_2) في الزمن $t=0$ عن موضع توازنه ثم ترك حرا فان محصلة الإزاحة ستتلاشى بصورة آسية مع مرور الزمن إلى أن يصل الجسيم موضع توازنه في زمن لانهائي الطول أي أن الجسيم سيعود ببطء شديد إلى موضع توازنه بعد فترة زمنية طويلة جدا ويتوقف عن الحركة تماما في ذلك الموضع دون أن يتذبذب. أن هذا يشير إلى أن المقاومة التي يعانيها المهتز كبيرة بحيث لأتسمح بحدوث أي اهتزاز.



الشكل (7) يبين تغير الإزاحة مع الزمن في المهتز الذي يعاني حركة شديدة الاضمحلال.