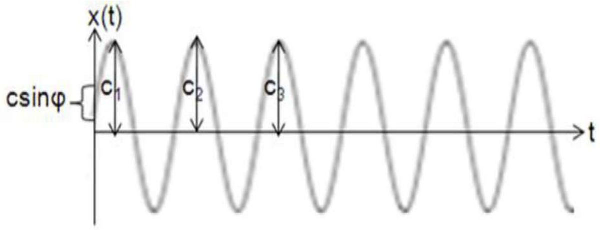
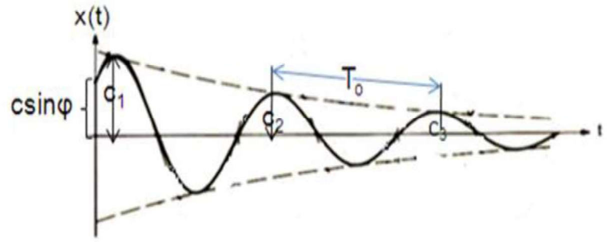
س:ملخص النتائج التي حصلت عليها في الحالات الأربع التي تمثل الحالات الخاصة للحل العام لمعادلة الحركة التوافقية المضمحلة كما في الشكل (8)



معادلة الحركة (14) الحركة اهتزازية سعة الحركة c ثابت الزمن الدوري T_o ثابت التردد الطبيعي f.



معادلة الحركة (17) الحركة اهتزازية سعة الحركة ce^{-rt} تتناقص مع الزمن.

الزمن الدوري $T<T_o$ التردد $f>f_o$.

معادلة الحركة (21) الحركة غير اهتزازية الجسيم يعود إلى موضع توازنه في اقل زمن ممكن.

معادلة الحركة (22) الحركة غير اهتزازية الجسيم يعود إلى موضع توازنه ببطء في زمن يزيد عن الزمن الذي يستغرقه في الحالة الحرجة.

مثال:مهتز يتألف من جسيم ونابض حلزوني يعاني أثناء اهتزازه على امتداد المحور السيني قوتين القوة الأولى هي قوة الاستعادة ومقدارها يتناسب مع الإزاحة الآنية x والقوة الثانية هي قوة إخماد ومقدارها يتناسب مع السرعة الآنية v. فإذا كانت قوة الاستعادة تساوي عدديا $40xdyne$ وقوة الإخماد تساوي $200dyne$ في اللحظة التي تكون فيها سرعته الآنية $10cm/S$ وإذا فرضنا إن كتلة الجسيم $5g$ وانه قد بدا حركته من السكون عند نقطة تبعد $20cm$ عن موضع التوازن. أوجد ما يلي

1. المعادلة التفاضلية لحركة المهتز والشروط التي تصف حركته.
2. الموضع الآني للجسيم في أي لحظة زمنية.
3. السعة والزمن الدوري والتردد للذبذبات المضمحلة.
4. ارسم الحركة بيانيا.
5. التردد الطبيعي والزمن الدوري الطبيعي للاهتزاز.

الحل

1. بما أن قوة الاستعادة تساوي

$$Fk = -kx = -40x$$

وثابت المقاومة R تساوي

$$R=F_R/v=200dyne/10cm/S=20dyne/cm/S$$

لذلك فان قوة الإخماد أو المقاومة F_R ومقدارها هو

$$F_R=-Rv=-20(dx/dt)$$

وبتطبيق قانون نيوتن الثاني في الحركة فينتج أن

$$\sum F=m(d^2x/dt^2)$$

$$m(d^2x/dt^2)=-R(dx/dt)-kx$$

$$5(d^2x/dt^2)=-20(dx/dt)-40x \qquad (1)$$

أي أن وبقسمة طرفي المعادلة (1) على 5 وبترتيب حدودها نحصل

$$(d^2x/dt^2)+4(dx/dt)+8x=0 \qquad (2)$$

وهذه هي المعادلة التفاضلية لحركة المهتز.

2.لإيجاد الموضع الآني x للجسيم في أية لحظة زمنية t يجب إيجاد الحل لمعادلة الحركة (2). لدينا الشروط الابتدائية للحركة وهي

$x=20$ في اللحظة الزمنية $t=0$

$v=0$ في اللحظة الزمنية $t=0$

نقارن المعادلة (2) مع المعادلة القياسية للحركة التوافقية المضمحلة فنجد أن

$$(d^2x/dt^2)+2r(dx/dt)+\omega^2x=0$$

$$\omega^2=8$$

$$2r=4$$

$$r^2=4$$

وهذا يشير إلى أن قيمة ω^2 اكبر من r^2 ($\omega^2>r^2$) أي أن الحركة الاهتزازية مضمحلة والحل المناسب هو

$$x=e^{-rt}(A\cos\omega_o t+B\sin\omega_o t) \qquad (3)$$

نعوض القيم المناسبة

$$\omega_o=(\omega^2-r^2)^{1/2}=(8-4)^{1/2}=2$$

$$r=2$$

في المعادلة (3) فتصبح

$$x=e^{-2t}(A\cos 2t+B\sin 2t) \qquad (4)$$

ولإيجاد قيم B,A نعوض الشروط الابتدائية في المعادلة (4) فنجد عند تعويض الشرط الابتدائي الأول أن السعة A تساوي

$$20=1(A+0)$$

$$A=20cm$$

ولتعويض الشرط الثاني يجب أن نفاضل المعادلة (4) بالنسبة للزمن فنحصل على

$$v=dx/dt=-2e^{-2t}(A\cos 2t+B\sin 2t)+e^{-2t}(-2A\sin 2t+2B\cos 2t)$$

$0=-2(A+0)+(0+2B)=-2(20)+(2B)=-40+2B$

$40=2B$

$B=20cm$

وهكذا نجد أن الموضع الآني x للجسيم في أية لحظة زمنية t هو

$x=e^{-2t}(20cos2t+20sin2t)$

ويمكن التعبير عن الحل السابق بطريقة أخرى، فلدينا العلاقة

$Acos2t+Bsin2t=Ccos(2t-\varphi)$

حيث أن

$C=(A^2+B^2)^{1/2}=(20^2+20^2)^{1/2}=20(2)^{1/2}cm$

وان

$tan\varphi=A/B=20/20=1$

$\varphi=arctan(1)=\pi/4$

وعليه يصبح الحل العام كالآتي:

$$x=20(2)^{1/2}e^{-2t}cos(2t-\pi/4) \qquad (5)$$

إن هذه المعادلة تمكننا من إيجاد موضع الجسيم x في أية لحظة زمنية t.

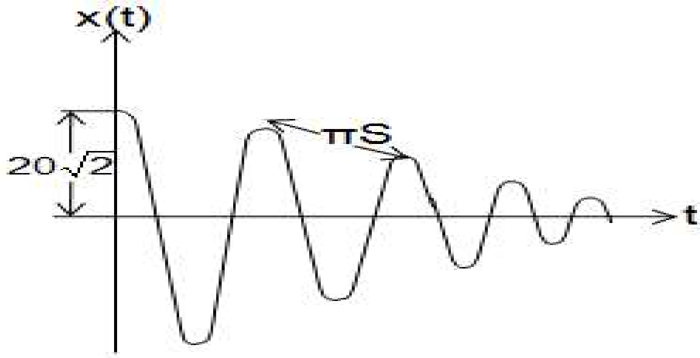
3.**من المعادلة (5) نجد أن السعة، الزمن الدوري والتردد للحركة المضمحلة يساوي**

$C=20(2)^{1/2}e^{-2t}cm$

$T_o=2\pi/\omega_o=2\pi/2=\pi S$

$f_o=\omega_o/2\pi=2/2\pi=1/\pi Hz$

4.إن حركة الجسيم يمكن تمثيلها بيانيا من خلال المعادلة (5) وذلك برسم الإزاحة الآنية x مع الزمن t فنجد من هذا الشكل إن سعة الاهتزاز تتناقص تدريجيا مع الزمن



5**. لإيجاد التردد الطبيعي والزمن الدوري في حالة انعدام الإخماد (أو المقاومة) نعوض $t=0$ في المعادلة (3) مع وضع $\omega_o=\omega$ فنحصل على $x=e^{-rt}(A\cos\omega t+B\sin\omega t)$ حيث أن**

$\omega^2=k/m$

ومنها نجد أن

$\omega^2=k/m=40/5=8$

$\omega=2(2)^{1/2}$

ومنها نجد الزمن الدوري الطبيعي T والتردد الطبيعي f كالأتي

$\omega=2\pi/T$

$T=2\pi/\omega=2\pi/2(2)^{1/2}=\pi/(2)^{1/2}S$

$f=1/T=(2)^{1/2}/\pi Hz$

سؤال:إن قيمة ثابت الاضمحلال r بالنسبة لقيمة ω هي التي تحدد طبيعة حركة المهتز، اشرح ذلك.

الجواب

1.عندما تكون قيمة r اكبر من قيمة ω لا يحدث اهتزازا وإذا ما أزيح المهتز عن موضع توازنه وترك حرا فانه يعود ببطء إلى موضع توازنه.

2.وإذا كانت قيمة $\omega=r$ تكون الحركة حرجة أي أن هذه القيمة تفصل بين سلوكين هما أما سلوك اهتزازي أو سلوك غير اهتزاز. وفي حالة $\omega=r$ إذا ما أزيح المهتز عن موضع توازنه وترك حرا فانه يعود إلى موضع توازنه بأقل زمن ممكن (دون أن يصاحبه اهتزاز).

3.وعندما تكون قيمة r اقل من من قيمة ω فعندئذ يمكن للمهتز أن يهتز ولكن اهتزازه يكون مضمحل أي أن سعته تقل بالتدريج. وسرعة تناقص السعة يعتمد على قيمة r وفي حالة متطرفة عندما r تنعدم $(r=0)$ فان المهتز يستمر بالاهتزاز وتبقى سعة حركته ثابتة

الفصل الخامس

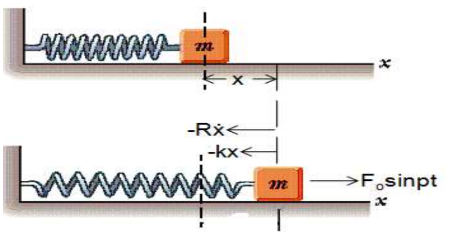
الاهتزاز القسري

مقدمة

لقد اقتصرت دراستنا حتى الآن على دراسة الاهتزاز الحر المضمحل وغير المضمحل حيث وجدنا انه عندما يزاح المهتز غير المضمحل عن موضع توازنه ويترك حرا فانه سوف يهتز بتردد يعتمد على ثوابت المرونة والقصور الذاتي، ومثل هذا التردد يدعى بالتردد الحر أو التردد الطبيعي. إن ما يساعد على استمرار الاهتزاز الحر هو الطاقة المخزونة في المهتز في بداية الحركة الاهتزازية ولكن بسبب المقاومة الاحتكاكية التي يتحتم وجودها دائما مهما كانت صغيرة فان سعة الاهتزاز سوف تتضاءل بالتدريج مع الزمن حتى يتوقف المهتز عن الاهتزاز. ولكي نحافظ على استمرار الاهتزاز يجب أن يزود المهتز بالطاقة باستمرار للتغلب على تأثير المقاومة الاحتكاكية. "وإذا كانت الوسيلة لتزويد المهتز بالطاقة على شكل قوة خارجية دورية فعندئذ يقال للمهتز انه في حالة اهتزاز قسري أو اهتزاز مجبر". ولعل من ابسط الأمثلة المألوفة على الاهتزاز القسري هو حركة الأرجوحة فالأرجوحة المهتزة إذا ما تركت وشانها فإنها سوف تتوقف عن الاهتزاز بعد فترة لن تطول كثيرا وذلك بسبب الفقدان المستمر للطاقة نتيجة الاحتكاك، ولكن إذا ما أعطيت دفعات صغيرة متعاقبة وعلى فترات زمنية مناسبة فإنها سوف تستمر على الاهتزاز نتيجة التعويض المستمر للطاقة المفقودة. وبالحقيقة إذا ما أحسن توقيت الدفعات بحيث تكون مؤثرة بنفس اتجاه الحركة وليس عكسها فان سعة الاهتزاز تكون كبيرة. وهناك أمثلة عملية كثيرة على الاهتزاز القسري، منها اهتزاز الجسر تحت ضربات أقدام طابور عسكري عند العبور واهتزاز هيكل المحرك نتيجة الضربات الدورية للمكابس داخل اسطوانات الاحتراق، واهتزاز الآلات الموسيقية بأنواعها الوترية والهوائية وذات الأغشية الرقيقة عند الإثارة الميكانيكية أو الكهربائية. إن مسالة الاهتزاز القسري هي مسالة عامة في الفيزياء. إذ أن حل هذه المسالة لا يقتصر فائدته على الحركات الاهتزازية والموجية فقط بل يتعداها إلى مجالات أخرى مختلفة في الصوتيات ودوائر التيار المتناوب والفيزياء الذرية.

معادلة الحركة للمهتز المضمحل تحت تأثير قوة خارجية دورية

سنعتبر هنا المهتز المؤلف من جسيم كتلته m متصل بطرف نابض حلزوني ثابت مرونته k ومثبت طرفه الأخر بأحكام كما في الشكل (1).



الشكل (1) مهتز مضمحل تحت تأثير قوة خارجية دورية

نفرض أن الجسيم يهتز في الهواء (أو أي وسط لزج) بسرعة غير عالية بحيث تكون المقاومة الاحتكاكية التي يعانيها الجسيم متناسبة طرديا مع سرعته. ونفرض أن الجسيم يخضع لقوة خارجية دورية F_p مقدارها $F_o sinpt$ حيث p يمثل التردد الزاوي لهذه القوة. وهذا التردد مستقل تماما عن التردد الزاوي الطبيعي ω أو التردد الزاوي المضمحل ω_o. إن هذه القوة الدورية تعمل على تغذية المهتز بالطاقة لتعوض عن الطاقة التي يخسرها خلال الحركة. إن الجسيم المهتز في هذه الحالة يكون خاضعا آنيا لثلاث قوى مختلفة هي قوة الاستعادة $F_k=-kx$ وقوة الاحتكاك $F_R=-R\dot{x}$ والقوة الخارجية الدورية $F_p=F_o sinpt$ ومحصلة هذه القوة المؤثرة في امتداد المحور السيني x هي

$$\sum F = F_p + F_R + F_k \qquad (1)$$

والآن نطبق قانون نيوتن الثاني في الحركة وتعويض قيم القوى المؤثرة على الجسيم المهتز في المعادلة (1)، فينتج أن

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = F_o sinpt - R\left(\frac{dx}{dt}\right) - kx \qquad (2)$$

نقسم طرفي المعادلة (2) على m ونرتبها فتصبح

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) + \frac{R}{m}\left(\frac{dx}{dt}\right) + \left(\frac{k}{m}\right)x = \left(\frac{F_o}{m}\right)sinpt \qquad (3)$$

ونفرض أن ($f_o=F_o/m$)، ولما كانت ($\omega^2=k/m$) و ($2r=R/m$) لذلك تصبح المعادلة (3) كالآتي

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) + 2r\left(\frac{dx}{dt}\right) + \omega^2 x = f_o sinpt \qquad (4)$$

حل معادلة الحركة القسرية (الحل الخاص)

لحل هذه المعادلة يجب أن نتذكر إن القوة الخارجية المسلطة بتردد زاوي p ستجبر الجسيم على الاهتزاز بهذا التردد، وبذلك فان كل حد من حدود هذه المعادلة في الطرف الأيسر يجب أن يتضمن دالة تتغير توافقيا مع الزمن بتردد زاوي p لهذا الغرض سنفرض الحل التجريبي باعتبار الإزاحة الآنية x تتغير توافقيا مع الزمن وفق المعادلة التالية

$$x = Asinpt + Bcospt \qquad (5)$$

لاختبار صحة هذا الحل نجد dx/dt و d^2x/dt^2 للمعادلة (5) ونعوضه في المعادله (4)

$$\frac{dx}{dt} = pAcospt - pBsinpt$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -p^2Asinpt - p^2Bcospt$$

$$-p^2Asinpt - p^2Bcospt + 2rpAcospt - 2rpBsinpt + \omega^2Asinpt + \omega^2Bcospt = f_o sinpt$$

نرتب هذه المعادلة فتصبح

$$(-p^2A - 2rpB + \omega^2A)sinpt + (-p^2B + 2rpA + \omega^2B)cospt = f_o sinpt \qquad (6)$$

فإذا كان الحل المفروض صحيحا فان الطرف الأيمن في هذه المعادلة يجب أن يساوي الطرف الأيسر عند أي لحظة زمنية t. وهذا يعني أن معامل $sinpt$ في الطرف الأيسر يجب أن يساوي معامل $sinpt$ في الطرف الأيمن في أية لحظة زمنية t، وكذلك بالنسبة لتساوي معاملي $cospt$ في الطرفين. فبالنسبة لمعاملي $sinpt$ و $cospt$ نجد أن

$$-p^2A - 2rpB + \omega^2A = f_o$$

$$-p^2A - 2rpB + \omega^2A = 0$$

نحل هاتين المعادلتين الآنيتين فنحصل على قيم A و B كالآتي

$$A = \frac{(\omega^2 - p^2)f_o}{(\omega^2 - p^2)^2 + (2rp)^2} \qquad (7)$$

$$B = \frac{-2rpf_o}{(\omega^2 - p^2)^2 + (2rp)^2} \qquad (8)$$

نعوض A و B في الحل المعادلة (5) فنجد أن

$$x = \left[\frac{(\omega^2 - p^2)f_o}{(\omega^2 - p^2)^2} + (2rp)^2\right] sinpt - \left[\frac{2rpf_o}{(\omega^2 - p^2)^2} + (2rp)^2\right] cospt \qquad (9)$$

ولأجل التعبير عن هذا الحل بشكل رياضي ابسط وبصورة يسهل التفسير الفيزيائي لسلوك الجسيم المهتز، يفضل استخدام الطريقة الاتجاهية لاختزال الحل. لهذا الغرض لدينا معادلة الإزاحة الآنية x وهي