## الرنين: Resonance

عندما تؤثر قوة خارجية ترددها الزاوي $p$ على مهتز تردده الزاوي الطبيعي غير المضمحل $\omega$ فان الرنين يحدث: عندما يتساوى تردد القوة المثيرة $p$ مع التردد الطبيعي للمهتز $\omega$. وتوخيا للدقة فان هذا التعريف للرنين غير دقيق تماما إلا تحت شروط نظرية بحتة لكون المهتز يعاني دائما قوى احتكاكية وبذلك يجب اخذ عامل الاضمحلال بالاعتبار. ومن اجل دراسة مفصلة للرنين سنحلل الحل الخاص للمعادلة (4) بطريقة وصفية للوصول إلى التعريف العلمي المناسب للرنين. إن الحل الخاص الذي يمثل الحالة المستقرة للاهتزاز القسري هو

$$x = \frac{f_o sin(pt+\theta)}{\sqrt{(\omega^2-p^2)^2+(2rp)^2}} \qquad (23)$$

حيث أن $f_o/\{(\omega^2-p^2)^2+(2rp)^2\}^{1/2}$ يمثل سعة الاهتزاز القسري وسنرمز له بالحرف $A$ لذلك فان

$$A = \frac{f_o}{\sqrt{(\omega^2-p^2)^2+(2rp)^2}} \qquad (24)$$

وعليه تصبح المعادلة (23) كالآتي

$$x = Asin(pt+\theta) \qquad (25)$$

يلاحظ من المعادلة (25) أن المهتز يهتز بتردد قسري $p$ (وهو تردد القوة الخارجية الدورية) وليس بتردده الطبيعي $\omega$. كما أن الحركة الناتجة هي حركة توافقية غير مضمحلة.

كما نلاحظ من المعادلة (24) أن سعة الاهتزاز $A$ تعتمد عل قيمة كل من التردد الطبيعي غير المضمحل $\omega$ والتردد القسري للقوة المؤثرة $p$ في اعتبار إن $f_o$ و $r$ ثوابت. فإذا اختلف التردد القسري $p$ اختلافا كبيرا عن التردد الطبيعي $\omega$ فان سعة الحركة الناتجة $A$ تكون صغيرة وكلما اقترب تردد القوة الخارجية المؤثرة $p$ من التردد الطبيعي غير المضمحل $\omega$ فان سعة الحركة الناتجة $A$ تزداد. وتصل السعة $A$ إلى ذروتها عندما تتساوى قيمة التردد القسري $P$ مع التردد الطبيعي $\omega$. وتعرف هذه الظاهرة باسم الرنين. كما يعرف التردد القسري $P$ الذي يقابل الذروة في سعة الاهتزاز القسري للمهتز باسم تردد الرنين. وتتوقف قيمة السعة $A$ على معامل الاضمحلال $r$ الذي يقيس مقدار قوة الاحتكاك التي يعانيها المهتز. فإذا عوضنا في المعادلة (24) بقيمة $p=\omega$ عندما $r=0$ فان قيمة السعة $A$ تصبح لانهائية في الكبر. وهذه الحالة تقابل انعدام الاضمحلال تماما أي عدم وجود قوة احتكاكية. وهذه الحالة لا تتحقق عمليا إذ لابد أن يكون دائما هناك قوى احتكاكية، وبالتالي فان السعة تصل إلى قيمة كبيرة ولكن محدودة. ولإيجاد قيمة التردد الذي عنده تصبح قيمة السعة في ذروتها يجب أن

نفاضل السعة $A$ بالنسبة لـ$p$ ثم نساوي النتيجة للصفر وبعدها نحسب قيمة $p$ التي عندها نحصل على أقصى قيمة للسعة $A$ فلدينا من المعادلة (24) بفرض أن

$$y = (\omega^2 - p^2)^2 + (2rp)^2$$

نعوض هذه النتيجة في المعادلة (24) فنحصل على

$$A = \frac{fo}{\sqrt{y}} \qquad (26)$$

أن أقصى قيمة لـ$A$ تحدث عندما تكون قيمة $y$ في نهايتها الصغرى. إن قيمة $y$ تكون في نهايتها الصغرى أو الكبرى عندما

$$\frac{dy}{dp} = -4p(\omega^2 - p^2) + 8r^2p = 0 \qquad (27)$$

أو

$$p(p^2 - \omega^2 + 2r^2) = 0 \qquad (28)$$

من المعادلة (28) نجد قيم $p$ أما تكون $p=0$ أو تكون $p=(\omega^2-2r^2)^{1/2}$، الآن نفاضل ثانية فنجد أن

$$\frac{d^2y}{dp^2} = -4\omega^2 + 12p^2 + 8r^2 \qquad (29)$$

فعندما نعوض $p=0$ نحصل على

$$\frac{d^2y}{dp^2} = -4(\omega^2 - 2r^2) < 0 \qquad (30)$$

وعندما نعوض $p=(\omega^2-2r^2)^{1/2}$ نحصل على

$$\frac{d^2y}{dp^2} = 8(\omega^2 - 2r^2) > 0 \qquad (31)$$

وعليه فان $p=(\omega^2-2r^2)^{1/2}$ تعطي قيمة النهاية الصغرى لـ$y$. وعندما تكون قيمة $y$ في نهايتها الصغرى فان قيمة السعة $A$ يجب أن تكون في نهايتها العظمى، وعليه فان قيمة التردد القسري $p$ الذي يقود إلى أقصى قيمة لسعة الاهتزاز $A$ هو

$$p = p_r = \sqrt{\omega^2 - 2r^2} \qquad (32)$$

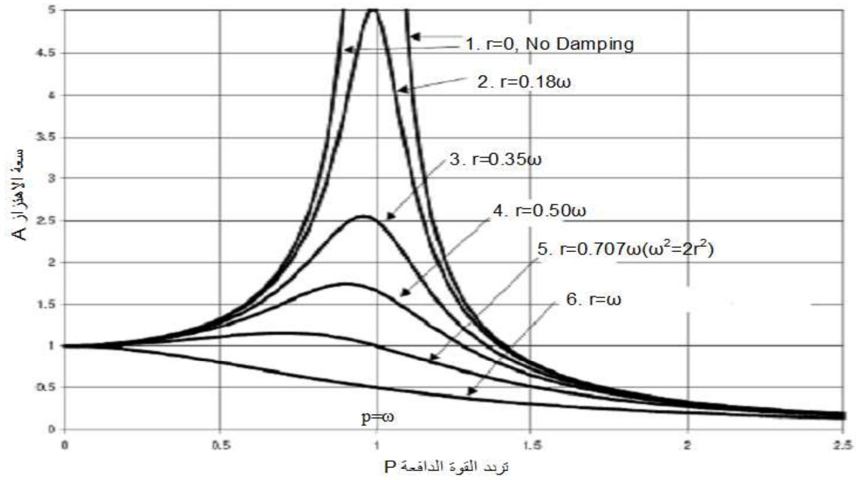
بتربيع طرفي المعادلة (32) نحصل على

$$p^2 = p_r^2 = (\omega^2 - 2r^2) \qquad (33)$$

هذه المعادلة (33) تعطي قيمة تردد الرنين $p_r$ ويلاحظ أن هذا التردد يكون دائما اقل من قيمة التردد الطبيعي $\omega$ ويلاحظ انه إذا كانت قيمة معامل الاضمحلال $\omega>r$ وقيمة $r$ اقل من 1 فان قيمة $r^2$ تزداد صغرا وبذلك فان $\omega^2>>r^2$ وعندئذ يكون شرط حدوث الرنين هو $p=\omega$ مقبولا بدرجة عالية من الدقة. أما إذا كانت قيمة $r$ كبيرة فان قيمة $2r^2$ لا يمكن إهمالها إطلاقا في المعادلة (33). وباستخدام المعادلة (24) يمكن رسم العلاقة البيانية بين السعة $A$ والتردد القسري $p$ لمختلف القيم لمعامل الاضمحلال $r$ وكما هو مبين في الشكل (4). المنحني (1) يوضح أن السعة تصبح مالانهاية في الكبر عندما $r=0$ أي في حالة انعدام الاضمحلال وهذا يحدث عندما $p$ تساوي تماما $\omega$ وهذه الحالة النظرية لا تتحقق عمليا لان المهتز سيتحطم تماما. إذا ما انعدم الاضمحلال وأصبحت السعة مالانهاية. ولو فرضنا جدلا أن المهتز لم يتحطم فان سعته الهائلة تعني حتما تجاوزه لحدود المرونة وبالتالي عدم خضوع المهتز لقانون هوك. ولهذا السبب ذكرنا في بداية الفصل أن التعريف الدقيق للرنين يجب أن يأخذ بالاعتبار عامل الاضمحلال.

توضح المنحنيات الثلاثة (2) و (3) و (4) اختلاف سعة الاهتزاز مع اختلاف قيم معامل الاضمحلال $r$ فعندما تكون قيمة $r$ واطئة فان الرنين يحدث بالقرب من $\omega$ وعندما تزداد قيمة $r$ فان موقع الذروة (القمة) يزحف إلى اليسار. وهذا يشير إلى أن تردد الرنين لنفس المهتز يختلف باختلاف قيمة $r$. ويتحكم بقيمة تردد الرنين $p$ المعادلة (33). وهكذا نرى أن الرنين يحدث عمليا عندما يقترب التردد القسري من التردد الطبيعي غير المضمحل للمهتز $\omega$ وتصل سعة الاهتزاز إلى ذروتها. حيث في هذه الحالة تصل فعالية القوة المثيرة في إمداد المهتز بالطاقة إلى أقصاها. وفي هذه الحالة يقال أن القوة المؤثرة في حالة رنين مع المهتز. وللأغراض العملية يمكن اعتبار أن الرنين يحدث عند أو بالقرب من $\omega$. أن المنحني (5) في الشكل (4) الذي يقابل معامل الاضمحلال $r=0.707\omega$ (أو $\omega^2=2r^2$)، يمثل خط الانتقال بين حالتين: فوق هذا الخط عندما تكون قيمة $r$ اصغر من $0.707\omega$ فان المنحنيات الناتجة يكون لها نهايات عظمى وتحت هذا الخط عندما تكون قيمة $r$ اكبر من $0.707\omega$ فان المنحنيات الناتجة لا يوجد فيها نهايات عظمى حقيقية. وعلية فان المنحنيات التي تقع فوق المنحني (5) يقابل كل منها حالة رنين ماعدا الحالة عندما $r=0$ والمنحنيات التي تقع تحت المنحني (5) لا يمكن ملاحظة أي اثر للرنين فيها. وهذا متوقع لأنه عند تعويض $\omega^2=2r^2$ في المعادلة (33) فان تردد الرنين الناتج يساوي صفرا. المنحني (6) في الشكل (4) الذي يقابل معامل الاضمحلال $r=\omega$ يقع تحت خط الانتقال (5) لذلك فلا يلاحظ أي ذروة مما يشير إلى عدم حدوث رنين يذكر ومن هذا المنحني يمكن إيجاد سعة الاهتزاز القسري في حالة الاضمحلال الزائد. ويكون التردد الطبيعي المضمحل $\omega_o$ اقل من التردد الطبيعي غير المضمحل $\omega$ للمهتز. ويلاحظ أن تردد الرنين $p$ لا يتساوى مع كل من التردد الطبيعي غير المضمحل $\omega$

والتردد الطبيعي المضمحل $\omega_o$. ولكنه يكون اصغر من كليهما. وإذا كانت القوى الاحتكاكية التي يعانيها المهتز صغيرة فان الفروق تكون صغيرة. بحيث يمكن اعتبار تردد الرنين $p$ مساويا للتردد الطبيعي $\omega$ ويكون الخطأ من الصغر بحيث يمكن إهماله.




الشكل (4) يوضح ستة منحنيات لست درجات من الاضمحلال 1.انعدام الاضمحلال. 2.ناقص الاضمحلال. 6.حرج الاضمحلال.

## سعة الاهتزاز عند الرنين

من الواضح من الشكل (4) السابق إن أقصى قيمة للسعة $A$ عند الرنين هي دالة لمعامل الاضمحلال $r$. والقيمة المضبوطة لسعة الاهتزاز في هذه الحالة يمكن إيجادها بتعويض تردد الرنين $p$ المعطى في المعادلة (33) في المعادلة (24) فعندئذ نحصل على أقصى قيمة للسعة $A_{max}$ أي عند تردد الرنين فان

$$A_{max} = \frac{f_o}{2r\sqrt{\omega^2 - r^2}} \qquad (34)$$

يلاحظ من هذه المعادلة (34) إن السعة في حالة الرنين تعتمد بشكل واضح على معامل الاضمحلال $r$ فإذا كانت قيمة هذا المعامل صغيرة اقل من 1 فان قيمة $r^2$ عندئذ يمكن إهمالها بالمقارنة مع $\omega^2$. وبذلك تصبح المعادلة (34) كالآتي

$$A_{max} = \frac{f_o}{2rw} \qquad (35)$$

لكن $2r=R/m$ و $f_o=F_o/m$ لذلك فان

$$A_{max} = \frac{F_o}{R\omega} \qquad (36)$$

المعادلة (36) تشير إلى انه عندما تكون المقاومة الاحتكاكية التي يعانيها المهتز صغيرة، فان سعة الاهتزاز عند الرنين تتناسب عكسيا مع ثابت المقاومة $R$. وتصبح السعة كبيرة جدا عندما تقترب قيمة $R$ من الصفر. وهكذا نلاحظ انه عندما يحدث الرنين فان سعة الاهتزاز تزداد بدون حدود ويتحكم بها فقط مقدار المقاومة الاحتكاكية التي يعانيها المهتز. وهكذا نتوقع انه كلما ازدادت المقاومة الاحتكاكية في مهتز، كلما قلت حدة الاهتزاز الرنيني الناجم عن استثارة خارجية معينة.

**أمثلة عملية على الرنين**

لقد وجدنا فيما سبق أن استجابة أي مهتز لتأثير قوة خارجية دورية يتوقف على العلاقة بين تردد القوة المؤثرة والتردد الطبيعي للمهتز. والمهتز قد يكون بسيطا جدا فيكون له تردد طبيعي واحد أو قد يكون معقدا فيكون له ترددات طبيعية كثيرة. وإذا ما أثرت قوة دورية لها تردد محدد على مهتز فأنها تسبب اهتزازه بنفس ترددها، ومتى ما اقترب أو انطبق تردد هذه القوة على احد الترددات الطبيعية للمهتز فان الرنين يحدث ويصبح الاهتزاز عنيفا. وقد ينتج من دفعات صغيرة متوالية قد أحسن توقيتها على مهتز، اهتزازا رنينيا خطيرا، بينما الأمر قد لا يكون كذلك إذا ما استخدمت دفعات كبيرة متعاقبة لم يحسن توقيتها، ومن هذا يتضح انه لكي يكون الرنين فعالا يجب أن يتوفر شرطان أساسيان: أولا يجب أن يكون تردد القوة المثيرة للاهتزاز مساويا لتردد المهتز، وثانيا، يجب أن يكون طور القوة المؤثرة متفقا مع طور الحركة للمهتز. إن أهمية الاهتزاز القسري تظهر عندما يحدث الرنين، وعلى الرغم من الفوائد العملية العديدة لظاهرة الرنين إلا أن هذه الظاهرة لا تخلو من الجوانب غير المرغوبة التي قد تؤدي إلى كوارث. ولتجنب التأثيرات غير المرغوبة للرنين، يجب معرفة التردد الطبيعي للمهتز واتخاذ الإجراءات المناسبة لتجنب الرنين. وبالنظر لأهمية ظاهرة الرنين سنأتي على ذكر بعض الأمثلة العملية البسيطة والمتباينة لنقف على مدى اثر هذه الظاهرة:

***1*.رنين عمود الهواء**

نمسك شوكة رنانة مهتزة فوق فوهة أنبوبة زجاجية مملوء جزئيا بالماء. ويحدث هذا اهتزازا قسريا في عمود الهواء فوق سطح الماء. ويمكن عن طريق ضبط مستوى سطح الماء أن نجعل التردد الطبيعي لعمود الهواء داخل الأنبوبة مساويا لتردد القوة المثيرة للاهتزاز(أي تردد الشوكة الرنانة) وعندما يحدث هذا فان فاعلية الشوكة المهتزة في إمداد الهواء بالطاقة الاهتزازية تصل إلى أقصاها. وعندئذ سنسمع رنينا قويا في الهواء الموجود بالأنبوبة استجابة للصوت الصادر من الشوكة الرنانة. إن ما يحدث فعلا في هذه الحالة هو أن الموجة الصوتية المنبعثة من الشوكة المهتزة تتحرك في العمود الهوائي داخل الأنبوبة وعندما تصل نهاية العمود تنعكس لتعود إلى موضع الشوكة المهتزة حيث تنعكس مرة أخرى بعد تقويتها إلى الأسفل وهكذا فان الشوكة المهتزة سوف تقوي الموجة الصوتية المنعكسة باستمرار وبذلك يستمر الرنين. ولا يقتصر حدوث الرنين في

هذه الحالة على ارتفاع معين لعمود الهواء بل يحدث أيضا عند ارتفاعات مختلفة تساوي مضاعفات طول عمود الهواء الذي حصل فيه الرنين الأول.

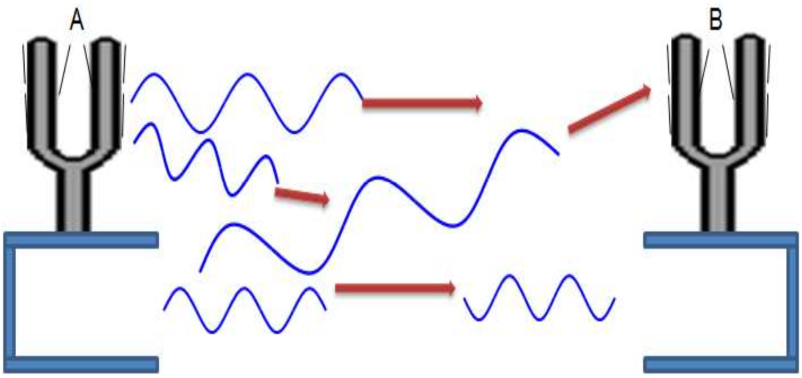
**2.رنين الأرجوحة**

عندما يسلط طفل دفعات دورية متتالية على أرجوحة ليهزها، فانه يعلم أيضا انه يجب أن يعطي الدفعات على فترات زمنية ، وبذلك فان سعة الاهتزاز تزداد تدريجيا وعندما يتطابق تردد الدفعات التي يسلطها الطفل على الأرجوحة مع التردد الطبيعي للأرجوحة فان الرنين يحدث وبذلك تكون سعة التأرجح كبيرة نسبيا. ويجب أن نتذكر انه ليس المهم فقط أن يتساوى الترددين ليحدث الرنين بل يجب أيضا أن تتفق الحركتان الاهتزازيتان بالطور ليكون كفاءة انتقال الطاقة من احد المهتزين إلى الآخر في أعلى مداه.

**3.رنين الشوكتين**

نأخذ شوكتين رنانتين لهما نفس التردد ونثبتهما على صندوقين متماثلين موضوعين على مسافة من بعضهما وجوانبهم المفتوحة متقابلة كما في الشكل (5). فعند طرق إحدى الشوكتين $A$ بمضرب من المطاط فإنها سوف تبدأ بالاهتزاز ومنها ينتقل الاهتزاز إلى الصندوق الذي يحملها وهذا بدوره يؤدي إلى اهتزاز الهواء بداخله قسريا فإذا كان طول عمود الهواء داخل الصندوق مساويا لربع طول موجة الصوت الذي تصدره الشوكة الرنانة المهتزة فان رنينا قويا سوف يحدث مما يؤدي إلى انبعاث موجات صوتية قوية من فوهة الصندوق. هذه الموجات عندما تسقط على الشوكة الثانية $B$ سوف تحفزها على الاهتزاز.

إن اهتزاز الشوكة الثانية بدون طرقها أو لمسها سببه هو أن الموجات الصوتية الصادرة من $A$ هي عبارة عن سلسلة من نبضات مؤلفة من تضاغطات وتخلخلات بعد انتقالها في الهواء تصل $B$. فجزء منها يضرب الشوكة $B$ مباشرة فيثير الاهتزاز فيها وجزء يسقط على الصندوق $B$ فيسبب اهتزاز الهواء بداخله مما يؤدي إلى اهتزاز الصندوق قسريا وهذا الاهتزاز القسري ينتقل إلى الشوكة $B$ فيشتد اهتزازها. ولما كان تردد الموجات الساقطة مساويا لتردد الشوكة $B$ فان هذه الشوكة سوف تهتز بنفس ترددها نتيجة الرنين. ويمكن توضيح ذلك بإسكات الشوكة الأولى بمسكها باليد، والإصغاء للشوكة الثانية التي تستمر في بعث الصوت.




الشكل (5) الشوكة $B$ تستجيب لحركة الشوكة $A$.

**4.الجسور المعلقة**

الجسر المعلق هو عبارة عن مهتز معقد من السهل هزه بسبب صغر عوامل الاضمحلال فيه نوعا ما. فإذا سار طابور من الجند على جسر معلق بخطوات منتظمة، فان ضربات الأقدام المتتالية التي تدك الجسر بنفس الطور وعلى فترات زمنية منتظمة تعمل عمل قوة دورية مؤثرة على الجسر. فإذا ما انطبق وقع سير الجند مع احد الترددات الطبيعية للجسر فان رنينا عنيفا يحدث وقد تكون سعة الاهتزاز في هذه الحالة من الكبر مما يؤدي إلى انهيار الجسر. وقد حدث فعلا إن كان الرنين سببا في تحطيم جسور عديدة. ولهذا السبب يؤمر الجند حتى وان كانوا جماعة صغيرة بالتخلي عن نظام سيرهم العسكري عند عبورهم الجسر تلافيا للكوارث. وهناك أمثلة عديدة على الماسي التي أحدثها الرنين في الجسور المعلقة. لقد تحطم جسر برتون المعلق فوق نهر ايرويل بمدينة مانجستر البريطانية تحت وقع أقدام طابور عسكري مؤلف من ستين رجلا فقط.

إلا أن اكبر مأساة وقعت عام 1850 حين دمرت كتيبة من المشاة الفرنسيين قوامها حوالي خمسمائة رجل جسر أنجير المعلق. ولقد هوى الجنود في واد سحيق وقتل منهم 226. وقبل سنين قليلة فقط انهار جسر معلق في حدائق القناطر الخيرية في مصر بسبب تأرجح بعض الأفراد فوقه بتردد انطبق على احد تردداته الطبيعية مما أدى إلى تحطيمه تماما. ولعل من اشهر الاهتزازات الرنينية هو ما حدث لجسر مضايق تاكوما بولاية واشنطن الأمريكية الذي يعد الجسر الثالث في ترتيبه العالمي من حيث الطول. هذا الاهتزاز أدى إلى انهياره ولم يمض على افتتاحه سوى أربعة اشهر فقط. ولم يكن سبب الانهيار مفهوما في حينه (1940). لان الاهتزازات التي تسببها الرياح على الجسور المعلقة لم تكن محط اهتمام المصممين. لقد تعرض جسر تاكوما لرياح مطردة جعلته يتذبذب قسريا، وعندما تطابق تردد القوة المتذبذبة التي أحدثتها الرياح المنتظمة مع احد الترددات الطبيعية لهذا الجسر، تسبب ذلك في زيادة سعة اهتزازه فتحطم. لقد جذبت كارثة جسر تاكوما قدرا كبيرا من الاهتمام لتجنب تكرر وقوعها. وبعد دراسات وبحوث مستفيضة أعيد بناء الجسر كما أعيد تصميم كثير من الجسور حتى تكون مستقرة من وجهة نظر ديناميك الهواء.

**مثال: كتلة مقدارها $2kg$ مربوطة بنابض، أعطيت قوة خارجية مقدارها $F=(3N)\cos(2\pi t)$ إذا كان ثابت القوة للنابض $20N/m$ أوجد:**

1. زمن الاهتزاز.
2. سعة الحركة بفرض عدم وجود إضمحلال للحركة.

1. $T=(2\pi/\omega)=(2\pi/2\pi)=1S$

2. $2r=0$ (لعدم وجود اضمحلال)

$A=f_o/\{(\omega^2-p^2)^2+(2rp)^2\}^{1/2}=(F/m)(1/\{(\omega^2-p^2)^2+(0)^2\}^{1/2})$

$p=(k/m)^{1/2}=(20/2)^{1/2}=3.16rad/S$

$A=(3/2)((4\pi^2)-(3.16)^2)^{-1}=0.509m=5.09cm$