وهنالك ثلاث سرع في الحركة الموجية متميزة عن بعضها تماماً ولكن ترتبط مع بعضها بعلاقات رياضية وهي :

أ- سرعة الذرة Atome velocity

ب- سرعة الطور phase velocity

جـ- سرعة المجموعة group velocity

وسوف نتناول كل سرعة على حدا .

أ- سرعة الذرة : وهي السرعة التوافقية للذرة حول موقع توازنه ، وهي مقدار متغير. فهي تكون في غايتها العظمى في لحظة مرور الذرة في موقع اتزانها . وتكون صفراً عندما يكون في اقصى ازاحة عن موقع اتزانها .

ب- سرعة الطور: وهي سرعة تقدم طور معين للموجة المفردة وهي مقدار ثابت في الوسط الواحد والتي يمكن التعبير عنها رياضياً بالعلاقة التالية :

$$V_{ph} = \frac{\omega}{k} \qquad ...(6\cdot37)$$

جـ- سرعة المجموعة : في حالة التعامل مع عدد أو مجموعة من الموجات ذات الاطوال الموجية المختلفة التي تتحرك آنيا في وسط ما ، فأنه ينبغي التعامل مع السلوك الجماعي لجميع الموجات في آن واحد وعدم التعامل مع كل موجة على انفراد خاصة اذا كانت المجموعة تتحرك في وسط مفرق..

اذن تعرف سرعة المجموعة على أن بحث سلوك هذه المجموعة من الموجات والتي يمكن التعبير عنها رياضياً بالعلاقة التالية

$$V_g = \frac{\partial\omega}{\partial k} \qquad ...(6\cdot38)$$

6.6 سرعة الطور وسرعة المجموعة في الشبيكة

Phase and group Velocities in lattice

إن التمييز الفيزيائي بين سرعة الطور وسرعة المجموعة هو أن سرعة الطور V_{ph} هي عبارة عن سرعة انتشار موجة نقية ذات تردد معين (ω) ومتجه موجي k بينما سرعة المجموعة عبارة عن سرعة انتشار عدد غير محدود من الترددات. إن سلوك سرعة الطور وسرعة المجموعة V_g للشبيكة في حدود الموجات الطويلة والتي تكون قيمة متجه الموجة صغيرة، تكون سرعة الطور مساوية لسرعة المجموعة ، أي ان

$$\frac{\omega}{k} = \frac{d\omega}{dk} = v_g = v_{ph} \qquad ...(6\cdot39)$$

ويرجع ذلك بسبب الموجات الطولية مقاربة للمسافة البينية بين الذرات ولاتتأثر بعدم التآصر في الوسط . اما في حالة زيادة التردد فأن سرعة الطور وسرعة المجموعة تختلفان عن بعضها ، حيث تكون :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = v_{ph} \cos \frac{ka}{2} \qquad ...(6\cdot40)$$

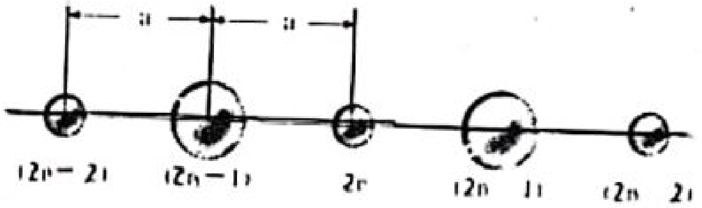
$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{2v}{ka} \sin \frac{ka}{2} \qquad ...(6\cdot41)$$

فن الملاحظ في المعادلتين (6.40) و (6.4) أنه كلما تقترب K من الصفر فان V_g تقترب من الصفر ايضاً بينما V_{ph} تقترب من سرعة الصوت . واذا اقتربت K من $\frac{\pi}{a}$ فأن V_g تقترب من الصفر بينما V_{ph} تقترب من $\frac{2v}{\pi}$.

6.7 أنماط الاهتزاز لشبيكة خطية ثنائية الذرات

Vibrational modes of diatomic linear lattice

تعد اهتزاز الشبيكة الخطية المكونة من سلسلة تحوي على نوعين مختلفين من الذرات اكثر تعقيداً من اهتزاز الشبيكة الخطية التي تحوي على نوع واحد من الذرات . إن الهدف الاساسي من دراسة هذا النمط من الاهتزاز لايجاد علاقة التفريق الذي تضم التردد الزاوي للذرات المهتزة ومتجه الموجة K . يبين الشكل (6.5) سلسلة من نوعين من الذرات كتلة النوع الاول m وكتلة النوع الثاني M حيث ان كتلة النوع الثاني اكبر من كتلة النوع الاول ($M > m$) وأن المسافة بين كل ذرتين متجاورتين a وبذلك تكون دورية فضاء السلسلة



الشكل (6.5) سلسلة من ثنائية الذرات

هي 2a . فعند مرور نبضة أو موجة خلال هذه الشبيكة فأنها تؤدي الى حدوث ازاحة لكل ذرة عن موقعها بمقدار صغير. وبذلك تكون الموجات الناتجة من اهتزاز الذرات المزاحة موجات طولية وموجات مستعرضة وكما سنرى فيما بعد.

وكما بينا سابقاً أن الحركة التي تصنعها الذرة المزاحة هي حركة توافقية بسيطة. مغلية فأن القوة التي سوف تتأثر بها الذرة هي القوة الناجمة عن قوة التجاذب الكهربائية والتي يطلق عليها بقوة الاواصر. إن هذهِ القوة تعمل على اعادة الذرات المزاحة الى مواقع اتزانها ولذلك يطلق عليها ايضاً بقوة الاستعادة أو قوة هوك. ولقد عرفنا في البند السابق قانون هوك.

دعنا نختار مواقع الذرات من نوع m على السلسلة في الارقام الزوجية مثل 2n و 2n+2 و 4 + 2n . وهكذا. وكذلك مواقع الذرات من نوع M على السلسلة في الارقام الفردية مثل (2n + 5) و (2n + 3) و (2n + 1) ... وهكذا.

ونفرض ان مقدار ازاحة الذرات التابعة للذرات نوع m هي u_{2n+4} و u_{2n+2} و u_{2n} وان مقدار الازاحات التابعة للذرات نوع m هي u_{2n+5} و u_{2n+3} و u_{2n+1} .. وهكذا. دعنا نعتبر فقط التأثير البيني بين أقرب جارة للذرة ونهمل غير ذلك، فعليه يكون :

$$F_{2n} = \mu [u_{2n+1} + u_{2n-1} - 2u_{2n}] \qquad ...(6\cdot42)$$

$$F_{2n+1} = \mu [u_{2n+2} + u_{2n} - 2u_{2n+1}] \qquad ...(6\cdot43)$$

إن المعادلتين (6.42) و (6.43) يمثلان معادلة الحركة لأي ذرة في السلسلة تحت تأثير قوة اول جيرة لتلك الذرة، ويمكن حلها كحل أية موجة من دون الخوض في التعقيدات الرياضية.

فعليه يمكن استخدام معادلة (6.17) لحل المعادلتين (6.42) و (6.43) وذلك بأعتبار أن حركة انتقال الموجة على طول جسم صلب متجانس بأتجاه محور معين مثل x. اذن :

$$u_{2n} = A \exp i [2kna - \omega t] \qquad ...(6\cdot44)$$

$$u_{2n+1} = B \exp i [k (2n + 1) a - \omega t] \qquad ...(6\cdot45)$$

١٩٢

$$- m\omega^2 A = \mu B [\exp ika + \exp - ika] - 2\mu A \qquad ...(6\cdot54)$$

$$- M\omega^2 B = \mu A [\exp ika + \exp - ika] - 2\mu B \qquad ...(6\cdot55)$$

ويمكن اعادة كتابتها :

$$A(2\mu - m\omega^2) - 2\mu B \cos ka = 0 \qquad ...(6\cdot56)$$

$$B(2\mu - M\omega^2) - 2\mu A \cos ka = 0 \qquad ...(6\cdot57)$$

ويمكن حل المعادلتين الانيتين بالمحددات :

$$\begin{vmatrix} 2\mu - m\omega^2 & -2\mu \cos ka \\ -2\mu \cos ka & 2\mu - M\omega^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A \\ B \end{vmatrix} = 0 \qquad ...(6\cdot58)$$

يمكن حل هذا المحدد اذا تلاش المحدد من معادلات A وَ B اي ان :

$$\begin{vmatrix} 2\mu - m\omega^2 & -2\mu \cos ka \\ -2\mu \cos ka & 2\mu - M\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad ...(6\cdot59)$$

وبفك المحدد واستعمال الدستور نحصل على

$$\omega^2 = \mu\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right) \mp \mu\sqrt{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)^2 - \frac{4\sin^2 ka}{mM}} \qquad ...(6\cdot60)$$

تسمى المعادلة (6.60) بعلاقة التفريق للشبيكة ذات النوعين من الذرات في خط مستقيم. فقبل رسم العلاقة بيانياً بين ω و k لابد لنا من مناقشة حل المعادلة خاصة عندما تكون قيمة K صغيرة جداً أوكبيرة جداً.

الحالة الأولى : عندما تكون قيم k صغيرة جداً ، أي انها تقترب من الصفر ، فأن (60.6) تصبح

$$\omega_1^2 = \mu\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right) + \mu\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right) \qquad ...(6\cdot 61)$$

بأخذ الإشارة السالبة نحصل على :

$$\omega_1^- = 0 \qquad ...(6\cdot 62)$$

وعندما نأخذ الاشارة الموجبة نحصل على :

$$\omega_1^+ = \sqrt{2\mu\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)} \qquad ...(6\cdot 63)$$

الحالة الثانية : عندما تكون قيم k كبيرة ، اي انها تساوي $k = \frac{n\pi}{2a}$ علماً ان n يجب ان تكون اعداد فردية اي ان $n = 1,3,5,7.....$ وبهذا تصبح المعادلة (6.60) :

$$\omega_2^2 = \mu\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right) + \mu\left[\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)^2 - \frac{4}{mM}\right]^{1/2} \qquad ...(6\cdot 64)$$

وبأخذ الاشارة السالبة الموجودة بين الحدين في المعادلة (6.64) نحصل على :

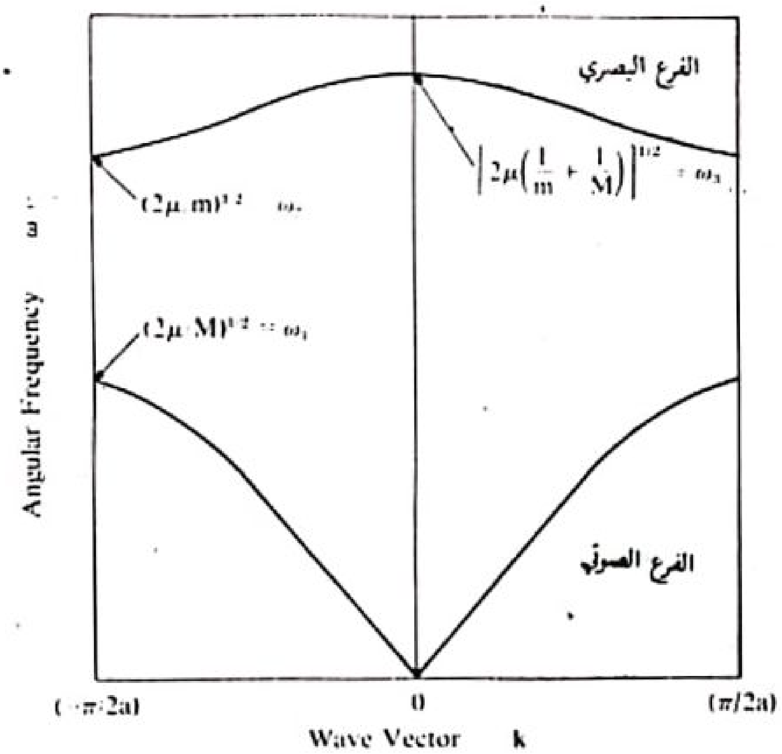
$$\omega_2^- = \left(\frac{2\mu}{M}\right)^{1/2} \qquad ...(6\cdot 65)$$

وبأخذ الاشارة الموجبة الموجودة بين الحدين في المعادلة (6.64) نحصل على :

$$\omega_2^+ = \left(\frac{2\mu}{m}\right)^{1/2} \qquad ...(6\cdot 66)$$

وبرسم العلاقة بين ω و k نحصل على منحني ذي فرعين يطلق على الاول بالفرع الصوتي acoustical branch (عندما تكون الاشارة سالبة بين الحدين في المعادلة (6.60). ويطلق على الفرع الثاني بالبصري optical branch (عندما تكون الاشارة موجبة بين الحدين في المعادلة (6.60) ويفصل هذين الفرعين منطقة يطلق عليها بالمنطقة المحظورة Forbidden band أو بمنطقة التردد المحظور وذلك بسبب عدم وجود قيم لـ ω_1

اكبر من ω_1 ولقيم حقيقية لمتجه الموجة . يعتمد عرض هذه المنطقة على اختلاف كتلتي الذرتين في السلسلة الخطية . اما اذا تساوت الكتلتين فأن الفرعين يلتقيان عندما تكون $k = \frac{\pi}{2a}$ وكما هو مبين في الشكل (6.6).



الشكل (6.6) علاقة التفريق بين ω , k لسلسلة خطية ثنائية الذرات.

إن سبب تسمية الفرعين بالصوتي والبصري يعود الى طور تذبذب الذرات حيث يكون تذبذب الذرات المختلفة للانماط الصوتية في طور واحد بينما يكون فرق الطور بين تذبذب الذرات المختلفة مساوياً لـ π للانماط البصرية.

6.8 الفرع الصوتي Acoustic branch

فكما هو موضح في الشكل (6.6) نرى ان الفرع الصوتي لشبيكة خطية ثنائية الذرات مشابه لمنحني التفريق في شبيكة خطية احادية الذرات (الشكل 6.3)، ولكن توجد بعض الاختلافات الاساسية بين هذين المنحنين. تتحرك الذرات في هذا الفرع بنفس الطريقة التي تتحرك الذرات فيها لو كانت الشبيكة الخطية متكونة من نوع واحد من الذرات ، وان شكل الموجة المتحركة هي موجة طولية وبهذا سمي هذا النوع بالفرع

الصوتي . وتكون حركة الذرات كلها في طور واحد in phase وكما هو مبين فى (6.7) .

يبدأ الفرع الصوتي من النقطة $k = o$ و $w = o$ ، وكلما ازدادت قيم k ، فأن قيم w تزداد خطياً في البداية ثم تحيد عن الخط المستقيم لتصبح منحنياً . إن اقصى قيمة وجدت

لـ ω عندما تكون $k = \frac{\pi}{2a}$ تساوي $\left(\frac{2\mu}{M}\right)^{1/2}$. وهذا يدل على ان اقصى تردد

زاوي لاهتزازات الانماط الصوتية لايعتمد على كتلة الذرة الصغيرة (m) بل يعتمد على كتلة الذرة الكبيرة (M). ويمكن تفسير هذه الظاهرة فيزيائياً من خلال دراسة سعات الذرات المتباينة الكتل بوصفها دوال للتردد الزاوي . فمن المعادلتين (6.56) و (6.57) نرى ان النسبة بين سعة الذرة B الكبيرة الى سعة الذرة الصغيرة A هي

$$\frac{B}{A} = \frac{2\mu - m\omega^2}{2\mu \cos ka}$$

...(6·67)

$$\frac{B}{A} = \frac{2\mu \cos ka}{2\mu - M\omega^2}$$

إن هذه النسبة تقترب من الواحد عندما تقترب قيمة k من الصغر وهذا يعني ان الذرات الصغيرة والكبيرة في السلسلة تتحرك بالاتجاه نفسه او بالطور نفسه في منطقة الترددات الواطئة . وبهذا نجد ان الموجات الصوتية تحقق الشروط التالية :

متجه الموجة $|k| << \frac{\pi}{2a}$

السرعة $v_0 = \left[\frac{2\mu a^2}{M + m}\right]^{1/2}$ ...(6·68)

التردد الزاوي $\omega = kv_0 << \left(\frac{2\mu}{M}\right)^{1/2}$

وكلما زادت قيم k تزداد قيم ω^- ولكن بنسب متفاوتة اي ان زيادة قيمة k بنسبة ما تسبب زيادة في قيمة ω^- ولكن بنسبة اقل. فعليه إن نسبة السعات سوف تزداد بازدياد قيم k الى ان تقترب نسبة السعات $\frac{B}{A}$ من اللانهاية وهكذا تتحقق الشروط التالية :

$$\text{متجة الموجة} \quad k = \mp \frac{\pi}{2a}$$

$$\text{التردد الزاوي} \quad \omega = \omega^- = \left(\frac{2\mu}{M}\right)^{1/2}$$

$$\text{سرعة الطور} \quad \frac{\omega}{k} = \left(\frac{8\mu a^2}{\pi^2 M}\right)^{1/2} \qquad ...(6\text{·}69)$$

$$\text{سرعة المجموعة} \quad \frac{d\omega}{dk} = 0$$

6 ، 9 الفرعي البصري Optical branch

تتحرك الذرات في الفرع البصري بموجات مستعرضة وهذا النوع من الامواج يشبه الامواج الكهرومغناطيسية ولذا سمي هذا الفرع بالبصري.

إن الذرات تتحرك بصورة متعاكسة في الطور anti – phase ويفارق طور π وكما هو مبين في الشكل (6.7). إن الفرع البصري يبدأ من النقطة $k = o$ وبأقصى تردد $\omega = \left[2\mu\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)\right]^{1/2}$ ثم ينخفض ببطء الى أن يصل حد الاشباع عند النقطة $k = \frac{\pi}{2a}$ بتردد زاوي $\left(\frac{2\mu}{m}\right)^{2/1}$ وكما هو مبين في الشكل (6.6).

إن قيمة نسبة السعات $\frac{B}{A}$ تكون سالبة عندما تكون قيمة k تقترب من الصفر. أي ان

$$\frac{B}{A} = -\frac{m}{M} \qquad ...(6\text{·}70)$$

فعند اطوال موجية طويلة تظهر الانماط البصرية لتحقق المعادلات التالية

$$k \rightarrow 0 \qquad \text{متجه الموجة}$$

$$\omega = 2\mu\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)^{1/2} \qquad \text{التردد الزاوي}$$

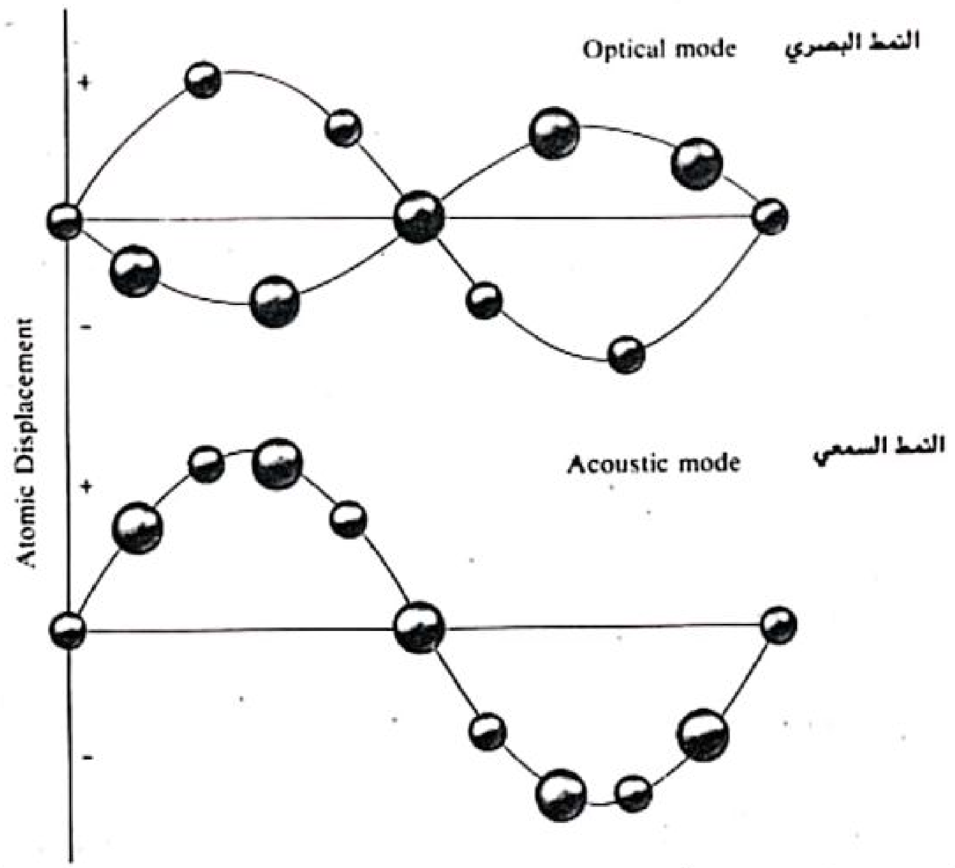
$$\frac{\omega}{k} \rightarrow \infty \qquad \text{سرعة الطور}$$

$$\frac{d\omega}{dk} \rightarrow 0 \qquad \text{سرعة الموجة}$$

...(6·71)

لقد تم حساب التردد نظرياً عندما تكون $K = \frac{2\pi}{a}$ من العلاقة $\omega = \sqrt{\frac{2\mu}{m}}$

وبتعويض قيم نموذجية لـ μ و m وجد أن التردد بحدود 10^{13} هرتز. وهذا التردد يقع في المنطقة تحت الحمراء. وهذا ما اكد تسمية هذا المنحني بالفرع البصري.



الشكل (6.7) الازاحات الذرية في الفرع البصري a ~λ والفرع السمعي ∞~λ لسلسلة خطية ثنائية الذرات.

اسئلة الفصل السادس

6.1 برهن على معادلة الحركة لسلسلة خطية احادية عند منطقة طيف الموجات الطويلة تختزل الى معادلة انتشار موجة في وسط مرن مستمر.

6.2 سلسلة خطية تحوي ذرات متشابهة كتلة كل منها M ماعدا ذرة واحدة كتلتها m حيث أن $M >> m$ افترض وجود تفاعل بين أقرب ذرتين متجاورتين في السلسلة وان ثابت القوة μ بين الذرات المتشابهة هو نفسه بين الذرات المختلفة . برهن على أن احد أنماط الاهتزاز الطيفي للسلسلة يكون موضعياً حول الذرة m وذات تردد زاوي

يعطى بالعلاقة $\omega^2 = \dfrac{2\mu}{m}$.

6.3 سلسلة خطية احادية الذرات ذات مسافة بينية $a = 3 \times 10^{10}m$ فاذا كان سرعة الصوت تساوي $3 \times 10^3 m/s$. احسب تردد القطع .

6.4 اذا علمت أن أقصر مسافة بين ايون الصوديوم وايون الكلور في كلوريد الصوديوم هي $2.82 \times 10^{-10}m$.احسب قيمة ثابت القوة . اذا علمت أن السرعة تساوي $3.4 \times 10^{-3}m/s$ وأن كتلة الصوديوم تساوي 3.8×10^{-23} وان كتلة الكلور تساوي 5.9×10^{-23} . غرام

6.5 عرف المصطلحات التالية

أ– الفوتون ب– تردد القطع

د– سرعة الطور د– سرعة المجموعة