البرمجة الخطية *Linear Programming*

تعتبر بحوث العمليات *Operations research* من العلوم التطبيقية الحديثة التي أحرز تطبيقها نجاحاً واسعاً في المجالات المدنية والعسكرية على حدٍ سواء . فجذورها التأريخية تمتد منذ القرن الثامن عشر وبالذات عام *1885* حيث إستخدم فردريك تايلر التحليل العلمي في طرق الإنتاج في محاولة لزيادة كمية المواد الخام المنقولة بأقل جهد ممكن . ونتيجة للمعضلات التعبوية والسوقية التي واجهت دول الحلفاء إثناء الحرب العالمية الثانية وصعوبة الحصول على حلول لهذه المعضلات من قبل جهة معينة ذات إختصاص واحد ، لذا قررت القيادة العامة لقوات الحلفاء تشكيل أول مجموعة استشارية مختلطة تضم عدد من العلماء الإختصاصيين للتعاون فيما بينهم وتقديم المشورة للقيادة ، ولقد سميت هذه المجموعة الإستشارية بفريق بحوث العمليات . لذا فقد دأب هذا الفريق منذ بداية تشكيله على دراسة الوضع العسكري لقوات الحلفاء وتقديم الأساليب العلمية لتحركات القوات المعادية ولإنزال أقصى الضربات فيها . وبعد إنتهاء الحرب العالمية الثانية عاد معظم العلماء الإختصاصيين في لجان بحوث العمليات إلى الحياة المدنية محاولين تطبيقها لحل معضلات مدنية متشابهة وتعميم دراستها في الجامعات. كما وإستفادت من تطبيقها شركات صناعية كبيرة وبالأخص المؤسسات ذات الأرباح العالية مثل الشركات النفطية . إذ إنها أول من قام بتطبيق إسلوب البرمجة في تخطيط الإنتاج وبأوسع مستوياته.

ومن أهم العوامل التي ساعدت إختصاصيي بحوث العمليات في حل المعضلات المعقدة هو تطور الحاسبات الأليكترونية إذ إنها ساعدت الباحثين في تنفيذ التحليلات والدراسات المطلوبة بسرعة ودقة فائقتين.

أما الخطوات المتخذة في بحوث العمليات لمعالجة المعضلات هي :

1- تعريف المشكلة قيد البحث .

2- صياغة النموذج الملائم للمشكلة

3- إيجاد حل للنموذج .

4- إختبار مدى صلاحية النموذج .

5- تنفيذ النتائج النهائية .

أما البرمجة الخطية *Linear programming* فتعود أساسياتها إلى القرن التاسع عشر إذ قدمت من قبل كوردن في عام *1873* وطورت في عام *1947* عندما إبتدع دانتزك الطريقة المبسطة *Simplex method* لجدولة إستلام المواد في سلاح الطيران الأمريكي . وحالياً تحتل البرمجة الخطية مركزاً مرموقاً في مجالات بحوث العمليات ،كما تكمن أهمية البرمجة الخطية في كونها وسيلة لدراسة سلوك عدد كبير من الأنظمة وتعتبر أبسط وأسهل النماذج التي يمكن إنشاؤها لمعالجة

معضلات البرمجة الصناعية والحكومية الكبرى . ويمكن القول إن البرمجة الخطية هي طريقة علمية تهدف إلى إستخدام الموارد المحدودة أفضل إستخدام لتحقيق هدف معين .

إن المستلزمات الأساسية للبرمجة الخطية هي :

1- وجود هدف معين مطلوب تحقيقه (كأقصى ربح أو أدنى كلفة ...إلخ).

2- وجود بدائل مختلفة للوصول إلى الهدف .

3- الموارد المستخدمة يجب أن تكون محدودة.

4- وجوب العلاقة بين المتغيرات .

5- التعبير عن دالة الهدف والقيود بمعادلات أو متباينات خطية.

4-1- صيغ البرمجة الخطية :

1- الصيغة العامة *General form* : تأخذ النموذج التالي :

$$\max .\text{or} \min . \quad Z=\sum_{j=1}^{n} C_j X_j \qquad \textit{Objective function}$$

$$S.t. \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \begin{Bmatrix} \le \\ \ge \\ = \end{Bmatrix} b_i \qquad \textit{Constraints}$$

$$i = 1,2,\dots,m$$

$$j = 1,2,\dots,n$$

إذ إن C_j تمثل الكلفة أو الزمن أو الربح أو الإيراد ...إلخ. للوحدة الواحدة.

X_j تمثل متغيرات القرار ***Decision variables*** .

a_{ij} تمثل المعاملات الفنية ***Technical coefficients*** .

b_i تمثل الكميات المتاحة للإستخدام ***Availability amounts*** .

2- الصيغة القانونية *Canonical form* : النموذج العام لهذه الصيغة يكون :

$$\max . \quad Z=\sum_{j=1}^{n} C_j X_j \qquad \textit{Objective function}$$

$$S.t. \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \le b_i \qquad \textit{Constraints}$$

$$X_j \ge 0 \qquad \textit{nonnegative constraints}$$

أي إنها تمتاز بالخصائص الآتية :

1- جميع متغيرات القرار تكون غير سالبة ($X_j \ge 0$) .

2- جميع القيود تكون من نوع أصغر أو يساوي($\le$) .

3- تعظيم *maximized* دالة الهدف فقط .

كما يمكن تحويل الصيغة العامة إلى الصيغة القانونية بإستخدام القواعد التالية :

1- يمكن تحويل تصغير *minimized* دالة الهدف إلى تعظيم *maximized* وبالعكس بـ ضرب دالة الهدف في (-1) ، أي إن : $max.\ Z = min.\ (-Z)$

2- يمكن تحويل قيد لكبر من أو يساوي $\geq$ إلى أصغر من أو يـ ساوي $\leq$ بضرب المتباينـة في (-1) ، أي إن : $\sum a_{ij}X_j \geq b_i \quad \Leftrightarrow \quad -\sum a_{ij}X_j \leq b_i$

3- يمكن تحويل قيد المساواة (=) إلى قيدين من نوع أصغر من أو يساوي $\leq$ وبالشكل التالي:

$$\sum a_{ij}X_j = b_i \quad \Leftrightarrow \quad \begin{Bmatrix} \sum a_{ij}X_j \leq b_i \\ -\sum a_{ij}X_j \leq -b_i \end{Bmatrix}$$

4- يمكن تحويل قيد القيمة المطلقة *absolute value* إلى قيدين من نـ ـوع أصـ ـغر مـ ـن أو يساوي $\leq$ وبالشكل التالي :

$$\left|\sum a_{ij}X_j\right| \leq b_i \quad \Leftrightarrow \quad \begin{Bmatrix} \sum a_{ij}X_j \leq b_i \\ -\sum a_{ij}X_j \leq b_i \end{Bmatrix}$$

$$or \quad \left|\sum a_{ij}X_j\right| \geq b_i \quad \Leftrightarrow \quad \begin{Bmatrix} -\sum a_{ij}X_j \leq -b_i \\ \sum a_{ij}X_j \leq -b_i \end{Bmatrix}$$

5- يمكن تحويل المتغير غير المقيد في الإشارة *unrestricted sign* إلـ ـى متغيـ ـرين غيـ ـر سالبين ، وكما في العلاقة أدناه :

$$X_i = X_i^{'} - X_i^{''} \quad and \quad X_i^{'}, X_i^{''} \geq 0$$

3- <u>الصيغة القياسية *Standard form*</u> : الشكل العام لهذه الصيغة يأخذ الخصائص التالية :

1- جميع القيود تكون معادلات (القيود من نوع مـ ـساواة (=)) ماعـ ـدا قيـ ـد عـ ـدم الـ ـسالبية *nonnegative* إذ يبقى متباينة من نوع لكبر من أو يساوي (أي إن $X_j \geq 0$) .

2- الطرف الأيمن للقيود يكون غير سالب (أي إن $b_i \geq 0$) .

3- دالة الهدف تكون إما تصغير *.min* أو تعظيم *.max* .

ويمكن تحويل الصيغة العامة إلى الصيغة القياسية وبالإضافة إلى ما طرح في الصيغة القانونية ، يمكن تحويل قيود المتباينات إلى معادلات وكما يلي :

$$\sum a_{ij}X_j \leq b_i \quad \Leftrightarrow \quad \sum a_{ij}X_j + S_i = b_i$$
$$\sum a_{ij}X_j \geq b_i \quad \Leftrightarrow \quad \sum a_{ij}X_j - S_i = b_i$$

إذ إن S_i تمثل متغيرات الركود *Slack variables* وهي متغيرات وهمية وتكون غير سالبة (أي إن $S_i \geq 0$) .

<u>مثال-1</u> : حول الصيغة العامة للبرمجة الخطية إلى الصيغة القانونية والصيغة القياسية :

$$\begin{aligned} min. \quad & Z = 2X_1 + 3X_2 + 5X_3 \\ s.t. \quad & X_1 + X_2 - X_3 \geq -5 \\ & -6X_1 + 7X_2 - 9X_3 = 15 \\ & \left|19X_1 - 7X_2 + 5X_3\right| \leq 13 \\ & X_1, X_2 \geq 0, X_3\ unrestricted \end{aligned}$$

<u>الحل</u>: بإفتراض إن : $X_3 = X_3{'} - X_3{''}$

أ- الصيغة القانونية :

$$\begin{aligned}
min.\quad & Z=-2X_1-3X_2-5(X_3{'}-X_3{''}) \\
s.t.\quad & -X_1-X_2+(X_3{'}-X{''})\le 5 \\
& -6X_1+7X_2-9(X_3{'}-X_3{''})\le 15 \\
& 6X_1-7X_2+9(X_3{'}-X_3{''})\le -15 \\
& 19X_1-7X_2+5(X_3{'}-X_3{''})\le 13 \\
& -19X_1+7X_2-5(X_3{'}-X_3{''})\le 13 \\
& X_1, X_2, X_3{'}, X_3{''}\ge 0
\end{aligned}$$

ب- الصيغة القياسية :

$$\begin{aligned}
max.\quad & Z=2X_1+3X_2+5(X_3{'}-X_3{''}) \\
s.t.\quad & -X_1-X_2+(X_3{'}-X{''})+S_1=5 \\
& -6X_1+7X_2-9(X_3{'}-X_3{''})=15 \\
& 19X_1-7X_2+5(X_3{'}-X_3{''})+S_3=13 \\
& -19X_1+7X_2-5(X_3{'}-X_3{''})+S_4=13 \\
& X_1, X_2, X_3{'}, X_3{''}, S_1, S_2, S_3, S_4\ge 0
\end{aligned}$$

4-2- <u>صياغة النموذج</u> ***<u>Formulation of the model</u>***

: يمكن صياغة النموذج الرياضي للبرمجة الخطية حسب المعطيات المتوفرة لدى الباحث ،كما موضحة في المثال التالي :

<u>مثال– 2</u> : مصنع ينتج ثلاثة منتجات A ، B و C وكل منتوج ينجز من خلال ثلاثة عمليات مختلفـة ، الزمن المستغرق (دقيقة) لإنتاج وحدة واحدة من كل منتوج والطاقة المتاحة لكل عمليـة (دقيقـة/ يوم) وربح الوحدة الواحدة لكل منتوج (ألف دينار) كانت كالآتي :

العملية	الزمن المستغرق (دقيقة)			الطاقة المتاحة
	A	B	C	
I	1	2	1	430
II	3	0	2	460
III	1	4	0	420
الربح	3	2	5	. . .

المطلوب: صياغة النموذج الرياضي للبرمجة الخطية للمسألة أعلاه لتعظيم الربح الكلي . ثـم أعد صياغة النموذج لكل حالة من الحالات التالية :

أ- بإفتراض منتوج رابع أضيف للعملية الإنتاجية والزمن المستغرق في العمليات الثلاثة هو (*3* ، *5* و *1*) على التوالي وربح الوحدة الواحدة هو *6* الآف دينار ، وإن الطاقة المتاحة للعملية الثالثة تستغل بكاملها .

ب- بإفتراض إن مجموع الطاقات المتاحة غير المستغلة للعمليات الثلاثة يجب أن لاتزيد عن *10* دقائق / يوم .

ج- بإفتراض إن دراسات السوق أشارت إلى أن نسبة عدد الوحدات المنتجة من المنتوج *A* إلى عدد الوحدات المنتجة من المنتوجين *B* و *C* يجب أن لاتقل عن *0.4* .

<u>الحل</u> : بإفتراض إن X_1 ، X_2 و X_3 تمثل عدد الوحدات المنتجة يومياً من المنتجات *A* ، *B* و *C* على التوالي . فالنموذج الرياضي سيكون :

$$\begin{aligned} max.\quad & Z = 3X_1 + 2X_2 + 5X_3 \\ s.t.\quad & X_1 + 2X_2 + X_3 \le 430 \\ & 3X_1 + 2X_3 \le 460 \\ & X_1 + 4X_2 \le 420 \\ & X_1, X_2, X_3 \ge 0 \end{aligned}$$

أ- النموذج الرياضي يكون :

$$\begin{aligned} max.\quad & Z = 3X_1 + 2X_2 + 5X_3 + 6X_4 \\ s.t.\quad & X_1 + 2X_2 + X_3 + 3X_4 \le 430 \\ & 3X_1 + 2X_3 + 5X_4 \le 460 \\ & X_1 + 4X_2 + X_4 = 420 \\ & X_1, X_2, X_3, X_4 \ge 0 \end{aligned}$$

ب-

$$430 - (X_1+2X_2+X_3) + 460 - (3X_1+2X_3) + 420 - (X_1+4X_2) \le 10$$
$$\rightarrow\ 5X_1 + 6X_2 + 3X_3 \ge 1300$$

لذا فالنموذج الرياضي سيكون :

$$\begin{aligned} max.\quad & Z = 3X_1 + 2X_2 + 5X_3 \\ s.t.\quad & X_1 + 2X_2 + X_3 \le 430 \\ & 3X_1 + 2X_3 \le 460 \\ & X_1 + 4X_2 \le 420 \\ & 5X_1 + 6X_2 + 3X_3 \ge 1300 \\ & X_1, X_2, X_3 \ge 0 \end{aligned}$$

ج- $$\frac{X_1}{X_2 + X_3} \ge 0.4 \Rightarrow\quad X_1 - 0.4X_2 - 0.4X_3 \ge 0$$

لذا فالنموذج الرياضي سيكون :