أ- بإفتراض منتوج رابع أضيف للعملية الإنتاجية والزمن المستغرق في العمليات الثلاثة هو (3 ، 5 و 1) على التوالي وربح الوحدة الواحدة هو 6 الآف دينار ، وإن الطاقة المتاحة للعملية الثالثة تستغل بكاملها .

ب- بإفتراض إن مجموع الطاقات المتاحة غير المستغلة للعمليات الثلاثة يجب أن لاتزيد عن 10 دقائق / يوم .

ج- بإفتراض إن دراسات السوق أشارت إلى أن نسبة عدد الوحدات المنتجة من المنتوج A إلى عدد الوحدات المنتجة من المنتوجين B و C يجب أن لاتقل عن 0.4 .

الحل : بإفتراض إن X_1 ، X_2 و X_3 تمثل عدد الوحدات المنتجة يومياً من المنتجات A ، B و C على التوالي . فالنموذج الرياضي سيكون :

$$\begin{aligned} max.\quad & Z = 3X_1 + 2X_2 + 5X_3 \\ s.t.\quad & X_1 + 2X_2 + X_3 \le 430 \\ & 3X_1 + 2X_3 \le 460 \\ & X_1 + 4X_2 \le 420 \\ & X_1, X_2, X_3 \ge 0 \end{aligned}$$

أ- النموذج الرياضي يكون :

$$\begin{aligned} max.\quad & Z = 3X_1 + 2X_2 + 5X_3 + 6X_4 \\ s.t.\quad & X_1 + 2X_2 + X_3 + 3X_4 \le 430 \\ & 3X_1 + 2X_3 + 5X_4 \le 460 \\ & X_1 + 4X_2 + X_4 = 420 \\ & X_1, X_2, X_3, X_4 \ge 0 \end{aligned}$$

ب-

$$430 - (X_1+2X_2+X_3) + 460 - (3X_1+2X_3) + 420 - (X_1+4X_2) \le 10$$
$$\rightarrow\ 5X_1 + 6X_2 + 3X_3 \ge 1300$$

لذا فالنموذج الرياضي سيكون :

$$\begin{aligned} max.\quad & Z = 3X_1 + 2X_2 + 5X_3 \\ s.t.\quad & X_1 + 2X_2 + X_3 \le 430 \\ & 3X_1 + 2X_3 \le 460 \\ & X_1 + 4X_2 \le 420 \\ & 5X_1 + 6X_2 + 3X_3 \ge 1300 \\ & X_1, X_2, X_3 \ge 0 \end{aligned}$$

ج-

$$\frac{X_1}{X_2 + X_3} \ge 0.4 \Rightarrow\ X_1 - 0.4X_2 - 0.4X_3 \ge 0$$

لذا فالنموذج الرياضي سيكون :

$$\begin{aligned} max. \quad & Z = 3X_1 + 2X_2 + 5X_3 \\ s.t. \quad & X_1 + 2X_2 + X_3 \le 430 \\ & 3X_1 + 2X_3 \le 460 \\ & X_1 + 4X_2 \le 420 \\ & X_1 - 0.4X_2 - 0.4X_3 \ge 0 \\ & X_1, X_2, X_3 \ge 0 \end{aligned}$$

4-3- حل نموذج البرمجة الخطية :

توجد طريقتان أساسيتان لحل نماذج البرمجة الخطية هما :

1- **الطريقة البيانية *Graphical method*** : تستخدم هذه الطريقة في حالة وجود عدد محدد من المتغيرات (متغيرين أو ثلاثة فقط) ولكنها لاتعطينا الطريقة العملية لحل البرامج الخطيـة لأن معظم مسائل البرمجة الخطية تتضمن عدد كبير من المتغيرات .

تستند هذه الطريقة على رسم هذه القيود من نقطتي تقاطعهم مع محوري الإحداثيات ، ومن ثم تحددالمنطقة المشتركة بين هذه القيود والتي تسمى بمنطقة الحلول المقبولة ***Feasible Solutions Region (F.S.R.)*** ، إذ إن زوايا هذه المنطقة تمثل النقاط المتطرفـة ***Extreme Points*** التـي منها نحصل على القيم المثلى ***Optimal values*** للمتغيرين بحيث يحققان غايـة دالـة الهـدف . وتعتبر هذه الطريقة الأساس في الوصول إلى الطريقة المبسطة ***Simplex method*** .

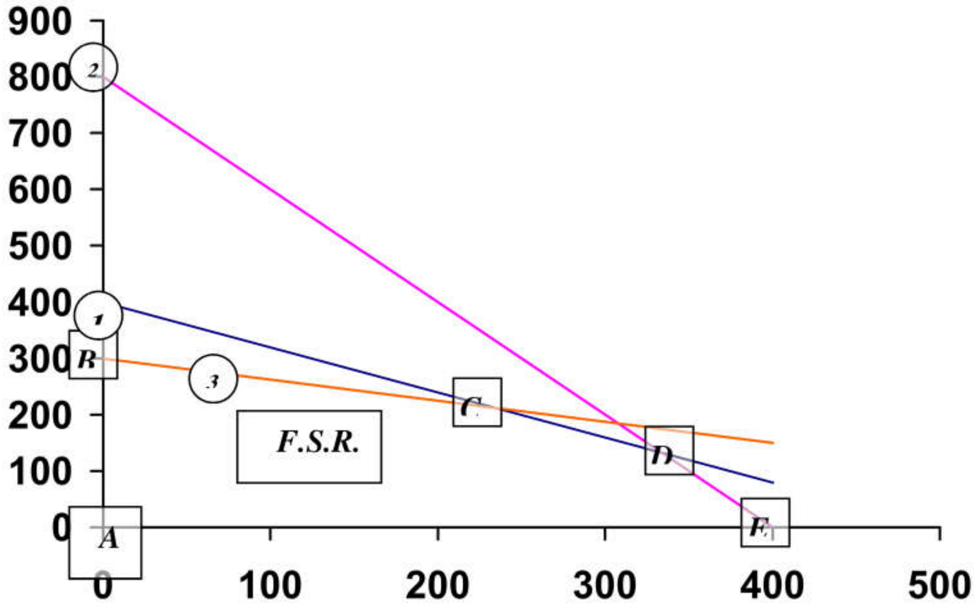
مثال-3 : حل نموذج البرمجة الخطية الآتي :

$$\begin{aligned} max. \quad & Z = 120X + 100Y \\ s.t. \quad & 2X + 2.5Y \le 1000 \\ & 3X + 1.5Y \le 1200 \\ & 1.5X + 4Y \le 1200 \\ & X, Y \ge 0 \end{aligned}$$

الحل :

$$\begin{array}{llllllll}
1. & 2X + 2.5Y = 100 & if & X = 0 & then & Y = 400 & \Rightarrow & (0,400) \\
 & & if & Y = 0 & then & X = 500 & \Rightarrow & (500.0) \\
2 & 3X + 1.5Y = 1200 & if & X = 0 & then & Y = 800 & \Rightarrow & (0,800) \\
 & & if & Y = 0 & then & X = 400 & \Rightarrow & (400,0) \\
3. & 1.5X + 4Y = 1200 & if & X = 0 & then & Y = 300 & \Rightarrow & (0,300) \\
 & & if & Y = 0 & then & X = 800 & \Rightarrow & (800,0) \\
4. & X = 0 & & & & & & \\
5. & Y = 0 & & & & & &
\end{array}$$

تثبت هذه النقاط بيانياً لتحديد منطقة الحلول المقبولة ***(F.S.R.)*** .



ومن الرسم أعلاه نلاحظ إن النقاط المتطرفة هي A ؛ B ؛ C ؛ D و E

بحل المعادلتين 1 و 3 آنياً فنحصل على النقطة (C(4000/17 , 3600/17

بحل المعادلتين 1 و 2 آنياً فنحصل على النقطة (D(1000/3 , 400/3

وبتعويض هذه النقاط المتطرفة في دالة الهدف نجد النقطة المثلى

Points	*Z = 120 X +100 Y*
A(0,0)	*Z = 0 + 0 = 0*
B(0,300)	*Z = 0 +100*300 = 30000*
C(4000/17, 3600/17)	*Z=120*(4000/17)+100*(3600/17)=840000/17*
D(1000/3,400/3)	*Z=120*(1000/3)+100*(400/3)=160000/3 →max.*
E(400,0)	*Z = 120* 400 + 0 = 48000*

لذا فالحل الأمثل يكون X=1000/3 و Y=400/3 ؛ وإن قيمة دالة الهدف Z=160000/3

<u>مثال 4</u> أوجد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية الآتية لتعظيم وكذلك لتصغير دالة الهدف

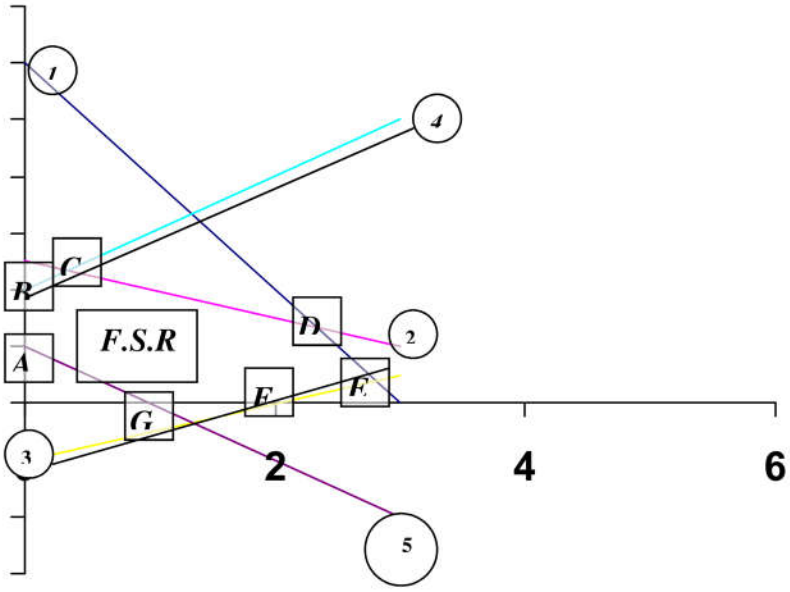
$$
\begin{aligned}
& Z = 4X + 5Y \\
s.t. \quad & 2X + Y \le 6 \\
& X + 2Y \le 5 \\
& X - 2Y \le 2 \\
& -X + Y \le 2 \\
& X + Y \ge 1 \\
& X, Y \ge 0
\end{aligned}
$$

الحل

1.	$2X+Y=6$	if	$X=0$	then	$Y=6$	$\Rightarrow$	$(0,6)$
		if	$Y=0$	then	$X=3$	$\Rightarrow$	$(3,0)$
2.	$X+2Y=5$	if	$X=0$	then	$Y=2.5$	$\Rightarrow$	$(0,2.5)$
		if	$Y=0$	then	$X=5$	$\Rightarrow$	$(5,0)$
3.	$X-2Y=2$	if	$X=0$	then	$Y=-1$	$\Rightarrow$	$(0,-1)$
		if	$Y=0$	then	$X=2$	$\Rightarrow$	$(2,0)$
4.	$-X+Y=2$	if	$X=0$	then	$Y=2$	$\Rightarrow$	$(0,2)$
		if	$Y=0$	then	$X=-2$	$\Rightarrow$	$(-2,0)$
5.	$X+Y=1$	if	$X=0$	then	$Y=1$	$\Rightarrow$	$(0,1)$
		if	$Y=0$	then	$X=1$	$\Rightarrow$	$(1,0)$

6. $X=0$

7. $Y=0$



بحل المعادلتين *2* و *4* آنياً نجد النقطة $C(1/3, 7/3)$

بحل المعادلتين *1* و *2* آنياً نجد النقطة $D(7/3, 4/3)$

بحل المعادلتين *1* و *3* آنياً نجد النقطة $E(14/5, 2/5)$

Points	$Z = 4X + 5Y$
$A(0, 1)$	$0 + 5 = 5$
$B(0, 2)$	$0 + 10 = 10$
$C(1/3, 7/3)$	$4/3 + 35/3 = 13$
$D(7/3, 4/3)$	$28/3 + 20/3 = 16 \rightarrow max.$
$E(14/5, 2/5)$	$56/5 + 10/5 = 66/5$
$F(2, 0)$	$8 + 0 = 8$
$G(1, 0)$	$4 + 0 = 4 \rightarrow min.$

لذا فالحل الأمثل يكون أعلى قيمة إلى Z هي 16 عندما $X = 7/3$ و $Y = 4/3$

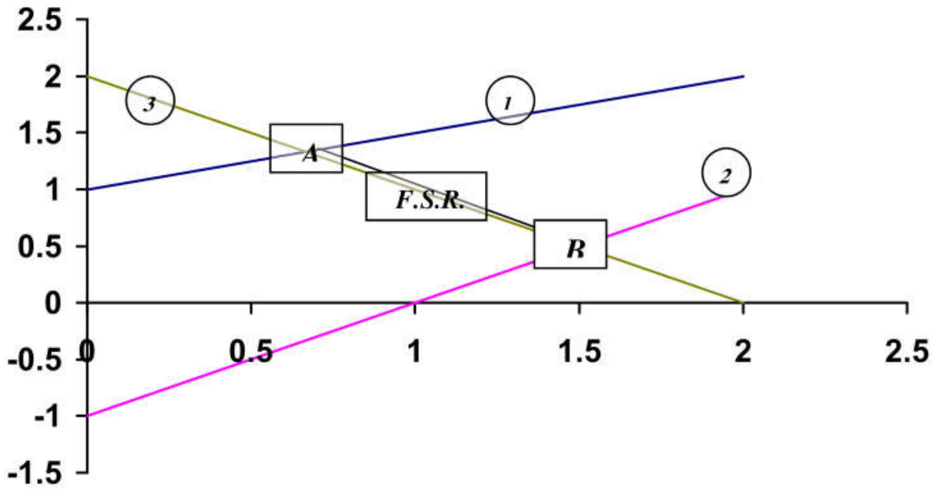
أقل قيمة إلى Z هي 4 عندما $X = 1$ و $Y = 0$

<u>مثال 5</u> حل نموذج البرمجة الخطية التالي بالطريقة البيانية

$$\begin{aligned} max.\quad & Z = 2X + 4Y + 8 \\ s.t.\quad & -X + 2Y \le 2 \\ & X - Y \le 1 \\ & X + Y = 2 \\ & X, Y \ge 0 \end{aligned}$$

<u>الحل</u>

$$\begin{array}{llllllll} 1. & -X + 2Y = 2 & if & X = 0 & then & Y = 1 & \Rightarrow & (0,1) \\ & & if & Y = 0 & then & X = -2 & \Rightarrow & (-2,0) \\ 2 & X - Y = 1 & if & X = 0 & then & Y = -1 & \Rightarrow & (0,-1) \\ & & if & Y = 0 & then & X = 1 & \Rightarrow & (1,0) \\ 3. & X + Y = 2 & if & X = 0 & then & Y = 2 & \Rightarrow & (0,2) \\ & & if & Y = 0 & then & X = 2 & \Rightarrow & (2,0) \\ 4. & X = 0 \\ 5. & Y = 0 \end{array}$$



منطقة الحلول المقبولة هي قطعة المستقيم AB والنقاط المتطرفة في هذه الحالة ستكون النقطتين

بحل المعادلتين 1 و 3 آنياً نحصة على النقطة $A(2/3 , 4/3)$

بحل المعادلتين 2 و 3 آنياً نحصل على النقطة $B(3/2 , 1/2)$

وعليه فإن

Points	$Z = 2X + 4Y + 8$
$A(2/3 , 4/3)$	$4/3 + 16/3 + 8 = 44/3 \rightarrow max.$
$B(3/2 , 1/2)$	$3 + 2 + 8 = 13$

لذا فالحل الأمثل هو $X = 2/3$ و $Y = 4/3$ وإن قيمة دالة الهدف $Z = 44/3$