لكون $120-$ القيمة الأكثر سالبية في صف $Z_j - C_j$ لذا فالمتغير الداخل هو X ولكون أقل نسبة 400 لذا فالمتغير الخارج هو S_2 ، وللحصول على صف X الجديد نقسم صف S_2 القديم على 3 .
وللحصول على صفي S_1 و S_3 الجديدين نتبع العمليات التالية :

صف X الجديد $*2-$	-2	-1	0	-2/3	0	-800
صف S_1 القديم	2	2.5	1	0	0	1000
بالجمع						
صف S_1 الجديد	0	1.5	1	-2/3	0	200

صف X الجديد $*1.5-$	-1.5	-0.75	0	-0.5	0	-600
صف S_3 القديم	1.5	4	0	0	1	1200
بالجمع						
صف S_3 الجديد	0	3.25	0	-0.5	1	600

ملاحظة : أما إذا ظهر على الأقل قيد واحد من نوع أكبر أويساوي ($\geq$) أو مساواة (=) ، فلايمكن تطبيق الطريقة المبسطة ، لذا يمكن إتباع إحدى الطريقتين التاليتين :

1- طريقة – M (*M- technique*): وقد تسمى أيضاً طريقة الجزاء *Penalty method*، وكما ذكرنا سابقاً فإن هذه الطريقة تستخدم عندما لا تكون جميع القيود من نوع أصغر من أويساوي ($\leq$) بشرط $b_i \geq 0$ ، أما الخطوات الأساسية لهذه الطريقة تكون :

أ- يكتب النموذج بالصيغة القياسية .

ب- تضاف المتغيرات الإصطناعية *Artificial variables* (R_i) إلى القيود من نوع أكبر من أو يساوي ($\geq$) أو مساواة (=) ويجب أن تكون قيم هذه المتغيرات في الحل النهائي (الأمثل) مساوية للصفر . بمعنى آخر:

- إذا كان القيد من نوع أصغر من أو يساوي ($\leq$) يضاف المتغير الراكد S_i .
- إذا كان القيد من نوع أكبر من أو يساوي ($\geq$) يطرح المتغير S_i و يضاف المتغير R_i .
- إذا كان القيد من المساواة (=) يضاف المتغير R_i .

أما معاملات المتغيرات الإصطناعية R_i في دالة الهدف هي (M -) في حالة *max.* و ($+ M$) في حالة *.min* ، وبإعتبار إن قيمة M كبيرة جداً . أما معاملات المتغيرات الراكدة S_i فمعاملاتها في دالة الهدف تبقى صفر .

ج- تستخدم المتغيرات الإصطناعية R_i كمتغيرات أساسية للقيود المتواجدة فيها في الحل الإبتدائي الأساسي المقبول (S.B.F.S.) .

د- الإستمرار بالحل كما في الطريقة المبسطة مع الأخذ بنظر الإعتبار إن قيمة M كبيرة جداً وأكبر من القيم المتواجدة في الجدول عند تحديد المتغيرات الداخلة .

مثال-7 : حل النموذج الرياضي الآتي :

$$\begin{aligned} min.\quad & Z = 5X_1 - 6X_2 - 7X_3 \\ s.t.\quad & X_1 + 5X_2 - 3X_3 \geq 15 \\ & 5X_1 - 6X_2 + 10X_3 \leq 20 \\ & X_1 + X_2 + X_3 = 5 \\ & X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{aligned}$$

الحل :

$$\begin{aligned} min.\quad & Z = 5X_1 - 6X_2 - 7X_3 + MR_1 + MR_2 \\ s.t.\quad & X_1 + 5X_2 - 3X_3 - S_1 + R_1 = 15 \\ & 5X_1 - 6X_2 + 10X_3 + S_2 = 20 \\ & X_1 + X_2 + X_3 + R_2 = 5 \\ & X_1, X_2, X_3, S_1, S_2, R_1, R_2 \geq 0 \end{aligned}$$

		5	−6	−7	0	0	M	M		
B.C.	B.V.	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	R_1	R_2	R.H.S.	Ratio
←M	R_1	1	5	-3	−1	0	1	0	15	3min.
0	S_2	5	-6	10	0	1	0	0	20	. .
M	R_2	1	1	1	0	0	0	1	5	5
$Z_j - C_j$		2M-5	6M+6↑	-2M+7	-M	0	0	0	20M	. .
−6	X_2	1/5	1	-3/5	-1/5	0	1/5	0	3	. .
0	S_2	31/5	0	32/5	-6/5	1	6/5	0	38	5.9
←M	R_3	4/5	0	8/5	1/5	0	-1/5	1	2	1.25min
$Z_j - C_j$		4/5M-31/5	0	8/5M+53/5↑	1/5M+6/5	0	-6/5M-6/5	0	2M-18	. .
−6	X_2	1/2	1	0	-1/8	0	1/8	3/8	15/4	
0	S_2	3	0	0	−2	1	2	−4	30	
−7	X_3	1/2	0	1	1/8	0	-1/8	5/8	5/4	
$Z_j - C_j$		-23/2	0	0	-1/8	0	-M+1/8	-M-53/8	-125/4	

لكون جميع قيم المعاملات في دالة الهدف (الصف $Z_j - C_j$) غير موجبة ، لذا فالحل أمثل وعليه فإن $X_1=0$ و $X_2=15/4$ و $X_3= 5/4$ وإن قيمة دالة الهدف في نهايتها الصغرى $Z= -125/4$.

2- <u>طريقة المرحلتين</u> <u>*Two- Phase technique*</u> : تستخدم هذه الطريقة أيـ ضاً عنـ دما لاتكون جميع القيود من نوع أصغر من أو يساوي ($\leq$) . تعتمد خطوات حل هذه الطريقة على مرحلتين ، وكما يلي :

أ- <u>المرحلة الأولى *Phase - I*</u> : تتضمن الخطوات التالية :

1. تحويل القيود إلى الصيغة القياسية وكما وضحت في الطريقة السابقة .
2. تلغى دالة الهدف الأصلية ويحل محلها دالة الهدف : $min.\quad R=\sum R_i$
بإعتبار إن R_i هي المتغيرات الإصطناعية الموجودة في القيود ، أما القيـ ود السابقة فتبقىكما هي .
3. تحل المسألة بالطريقة المبسطة ويتم التوقف عندما تكون قيمة $R=0$ وتـ صبح المتغيرات الإصطناعية R_i متغيرات غير أساسية ، أي إن قيمها فـ ي الجـ دول الأخير تساوي صفر . وبخلافه (أي إن $R\neq 0$) يعنـ ى لايوجـ د حـ ل أمثـ ل للمسألة .

ب- <u>المرحلة الثانية *Phase-II*</u> : تتضمن الخطوات التالية :

1. تحذف أعمدة R_i من الجدول الأمثل السابق وبـ إحلال معـ املات دالـ ة الهـ دف الأصلية محل معاملات دالة الهدف للجدول الأخير .
2. تحل المسألة بالطريقة المبسطة للوصول إلى الحل الأمثل .

<u>مثال-8</u> : حل نموذج المثال-7 بطريقة المرحلتين

<u>***Phase – I***</u> :

$$
\begin{aligned}
min.\quad & R = R_1 + R_2 \\
s.t.\quad & X_1 + 5X_2 - 3X_3 - S_1 + R_1 = 15 \\
& 5X_1 - 6X_2 + 10X_3 + S_2 = 20 \\
& X_1 + X_2 + X_3 + R_2 = 5 \\
& X_1, X_2, X_3, S_1, S_2, R_1, R_2 \geq 0
\end{aligned}
$$