2- طريقة المرحلتين *Two- Phase technique* : تستخدم هذه الطريقة أيـ ضاً عنـ دما لاتكون جميع القيود من نوع أصغر من أو يساوي ( $\leq$ ) . تعتمد خطوات حل هذه الطريقة على مرحلتين ، وكما يلي :

أ- المرحلة الأولى *Phase - I* : تتضمن الخطوات التالية :

1. تحويل القيود إلى الصيغة القياسية وكما وضحت في الطريقة السابقة .
2. تلغى دالة الهدف الأصلية ويحل محلها دالة الهدف : $min.\quad R=\sum R_i$
   بإعتبار إن $R_i$ هي المتغيرات الإصطناعية الموجودة في القيود ، أما القيـ ـود السابقة فتبقى كما هي .
3. تحل المسألة بالطريقة المبسطة ويتم التوقف عندما تكون قيمة $R=0$ وتـ صبح المتغيرات الإصطناعية $R_i$ متغيرات غير أساسية ، أي إن قيمها فـ ـي الجـ ـدول الأخير تساوي صفر . وبخلافه ( أي إن $R\neq 0$ ) يعنـ ـى لايوجـ ـد حـ ـل أمثـ ـل للمسألة .

ب- المرحلة الثانية *Phase-II* : تتضمن الخطوات التالية :

1. تحذف أعمدة $R_i$ من الجدول الأمثل السابق وبـ إحلال معـ ـاملات دالـ ـة الهـ ـدف الأصلية محل معاملات دالة الهدف للجدول الأخير .
2. تحل المسألة بالطريقة المبسطة للوصول إلى الحل الأمثل .

مثال-8 : حل نموذج المثال-7 بطريقة المرحلتين

***Phase – I*** :

$$\begin{aligned}
min.\quad & R = R_1 + R_2 \\
s.t.\quad & X_1 + 5X_2 - 3X_3 - S_1 + R_1 = 15 \\
& 5X_1 - 6X_2 + 10X_3 + S_2 = 20 \\
& X_1 + X_2 + X_3 + R_2 = 5 \\
& X_1, X_2, X_3, S_1, S_2, R_1, R_2 \geq 0
\end{aligned}$$

| | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **B.C.** | **B.V.** | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $S_1$ | $S_2$ | $R_1$ | $R_2$ | **R.H.S.** | **Ratio** |
| ←1 | $R_1$ | 1 | 5 | -3 | −1 | 0 | 1 | 0 | 15 | 3→min. |
| 0 | $S_2$ | 5 | -6 | 10 | 0 | 1 | 0 | 0 | 20 | . . |
| 1 | $R_2$ | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 5 | 5 |
| $R_j - C_j$ | | 2 | 6↑ | -2 | -1 | 0 | 0 | 0 | 20 | . . |
| 0 | $X_2$ | 1/5 | 1 | -3/5 | -1/5 | 0 | 1/5 | 0 | 3 | . . |
| 0 | $S_2$ | 31/5 | 0 | 32/5 | -6/5 | 1 | 6/5 | 0 | 38 | 5.9 |
| ←1 | $R_3$ | 4/5 | 0 | 8/5 | 1/5 | 0 | -1/5 | 1 | 2 | 1.25→min |
| $R_j - C_j$ | | 4/5 | 0 | 8/5↑ | 1/5 | 0 | -6/5 | 0 | 2 | . . |
| 0 | $X_2$ | 1/2 | 1 | 0 | -1/8 | 0 | 1/8 | 3/8 | 15/4 | |
| 0 | $S_2$ | 3 | 0 | 0 | −2 | 1 | 2 | −4 | 30 | |
| 0 | $X_3$ | 1/2 | 0 | 1 | 1/8 | 0 | -1/8 | 5/8 | 5/4 | |
| $R_j - C_j$ | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | - 1 | -1 | 0 | |

**بما إن قيم $R_1$ و $R_2$ صفرية( أي إنها متغيرات غير أساسية ) وإن قيمة $R=0$ لـ ذا ننتقل إلى المرحلة الثانية بحذف عمودي $R_1$ و $R_2$ وإرجاع معاملات دالة الهدف الأصلية :**

***Phase-II* :**

| | | 5 | −6 | −7 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **B.C.** | **B.V.** | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $S_1$ | $S_2$ | **R.H.S.** |
| −6 | $X_2$ | 1/2 | 1 | 0 | -1/8 | 0 | 15/4 |
| 0 | $S_2$ | 3 | 0 | 0 | −2 | 1 | 30 |
| −7 | $X_3$ | 1/2 | 0 | 1 | 1/8 | 0 | 5/4 |
| $Z_j - C_j$ | | -23/2 | 0 | 0 | -1/8 | 0 | -125/4 |

**لكون جميع معاملات دالة الهدف غير موجبة ودالة الهدف من نوع *.min* ، لذا فالحل أمثل وعليه فإن : $X_1=0$ و $X_2=15/4$ و $X_3= 5/4$ وإن قيمة دالـة الهـدف في نهايتها الصغرى $Z= -125/4$ وهو نفس الحل الذي حصلنا علية في المثال السابق .**

# تمارين الفصل الرابع

1- حول النماذج التالية إلى الصيغتين القانونية والقياسية :

$$
\begin{aligned}
1)\quad max. \quad & Z = X_1 - 3X_2 \\
s.t. \quad & -X_1 + 2X_2 \le 5 \\
& X_1 + 3X_2 = 10 \\
& X_1, X_2 \ \text{unrestricted in sign}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2)\quad min. \quad & Z = 3X_1 - 3X_2 + 7X_3 \\
s.t. \quad & X_1 + X_2 + 3X_3 \le 40 \\
& X_1 + 9X_2 - 7X_3 \ge 50 \\
& 2X_1 + 3X_2 = 20 \\
& |5X_2 + 8X_3| \le 100 \\
& X_1, X_2 \ge 0, \quad X_3 \ \text{unrest.}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
3)\quad min. \quad & Z = -3X_1 + 4X_2 - 2X_3 + 5X_4 \\
s.t. \quad & 4X_1 - X_2 + 2X_3 - X_4 = -2 \\
& X_1 + X_2 + 3X_3 - X_4 \le 14 \\
& 2X_1 + 3X_2 - X_3 + 2X_4 \ge 2 \\
& X_1, X_2 \ge 0 \ , \quad X_3 \le 0 \ , \quad X_4 \text{unrest.}
\end{aligned}
$$

2- مصنع ينتج أربعة منتجات $D, C, B, A$ بإستخدام ماكنتين $M_2, M_1$ ، الزمن المستغرق وكلفة إنتاج وحدة واحدة على كل من الماكنتين والوقت المتاح للإشتغال لكل ماكنة وسعر البيع للوحدة الواحدة لكل منتج موضحة في الجدول أدناه :

| machines | Time per unit ( hours/unit) | | | | Cost | Availability |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | A | B | C | D | (I.D./hour) | hours |
| $M_1$ | 2 | 3 | 4 | 2 | 10 | 500 |
| $M_2$ | 3 | 2 | 1 | 2 | 15 | 380 |
| Sales price (I.D./unit) | 65 | 70 | 55 | 45 | . . | . . |

علماً إن الكلفة الكلية لإنتاج وحدة واحدة تعتمد مباشرة على زمن إشتغال الماكنة . المطلوب صياغة نموذج رياضي للبرمجة الخطية للمسألة أعلاه لتحقيق :

أ) أقل كلفة إجمالية. و ب) أعلى صافي ربح كلي .