# تمارين الفصل الرابع

1- حول النماذج التالية إلى الصيغتين القانونية والقياسية :

$$
\begin{aligned}
1)\quad & \max. & Z &= X_1 - 3X_2 \\
& s.t. & -X_1 + 2X_2 &\le 5 \\
& & X_1 + 3X_2 &= 10 \\
& & X_1, X_2 & \text{ unrestricted in sign}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2)\quad & \min. & Z &= 3X_1 - 3X_2 + 7X_3 \\
& s.t. & X_1 + X_2 + 3X_3 &\le 40 \\
& & X_1 + 9X_2 - 7X_3 &\ge 50 \\
& & 2X_1 + 3X_2 &= 20 \\
& & |5X_2 + 8X_3| &\le 100 \\
& & X_1, X_2 \ge 0, &\quad X_3 \text{ unrest.}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
3)\quad & \min. & Z &= -3X_1 + 4X_2 - 2X_3 + 5X_4 \\
& s.t. & 4X_1 - X_2 + 2X_3 - X_4 &= -2 \\
& & X_1 + X_2 + 3X_3 - X_4 &\le 14 \\
& & 2X_1 + 3X_2 - X_3 + 2X_4 &\ge 2 \\
& & X_1, X_2 \ge 0 \;,\; X_3 \le 0 &\;,\; X_4 \text{ unrest.}
\end{aligned}
$$

2- مصنع ينتج أربعة منتجات $A , B , C , D$ بإستخدام ملكنتين $M_1 , M_2$ ، الزمن المستغرق وكلفة إنتاج وحدة واحدة على كل من الملكنتين والوقت المتاح للإشتغال لكل ملكنة وسعر البيع للوحدة الواحدة لكل منتج موضحة في الجدول أدناه :

| machines | Time per unit ( hours/unit) | | | | Cost | Availability |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | A | B | C | D | (I.D./hour) | hours |
| $M_1$ | 2 | 3 | 4 | 2 | 10 | 500 |
| $M_2$ | 3 | 2 | 1 | 2 | 15 | 380 |
| Sales price (I.D./unit) | 65 | 70 | 55 | 45 | . . | . . |

علماً إن الكلفة الكلية لإنتاج وحدة واحدة تعتمد مباشرة على زمن إشتغال الملكنة . المطلوب صياغة نموذج رياضي للبرمجة الخطية للمسألة أعلاه لتحقيق :

أ) أقل كلفة إجمالية. و ب) أعلى صافي ربح كلي .

3- صناعي يشغل أربعة مكائن لإنتاج نوعين من المنتجات ، الطاقة الإنتاجية للمكـائن (وحـدة/يـوم) وكلف إشتغالهم موضحة في الجدول أدناه :

| machines | Products I | Products II | Operation Cost (I.D./day) |
|---|---|---|---|
| I | 4 | 5 | 2000 |
| II | 6 | 3 | 2200 |
| III | 2 | 7 | 1800 |
| IV | 8 | 4 | 1600 |

قرر الصناعي إن إنتاجه من المنتوج الأول لا يقل عن *60* وحدة / إسبوع ، ولا يزيد إنتاجه من المنتوج الثاني عن *75* وحدة / إسبوع . أكتب النموذج الرياضي للبرمجة الخطية لتحديد عدد أيـام الإشتغال لكل ملكنة خلال الإسبوع لتقليل إجمالي الكلف .

4- شركة تنتج نوعين من القبعات ،كل قبعة من النوع الأول تحتاج إلى ضـعف الـزمن المـستغرق لإنتاج قبعة من النوع الثاني ، فإذا إقتصر الإنتاج على النوع الثاني فقط فللشركة إمكانية إنتاج *500* قبعة من هذا النوع .كما وإن دراسات السوق أشارت إلى إمكانية بيع *150* قبعة من النوع الأول و *250* قبعة من النوع الثاني . وإن الأرباح لكل قبعة من النوع الأول هي *8000* دينار و *5000* دينار من النوع الثاني . حـدد عـدد القبعـات الممكـن إنتاجهـا لكـلا النـوعين لتعظـيم الأربـاح .

*(ans.: 125 , 250 , 2250000)*

5- تقوم شركة بإنتاج أربعة أنواع من المكائن *A , B , C , D* تحتاج هذه الشركة إلى نـوعين مـن المواد الأولية وإلى ساعات عمل معينة لإنتاج هذه المكائن وكما مبينة في الجدول أدناه :

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| Raw material-I | 8 | 14 | 10 | 6 |
| Raw material-II | 2 | 4 | 7 | 6 |
| Labor time ( hours) | 2 | 1 | 3 | 1 |

يتوفر لدى الشركة *800* طن من المواد الأولية *RM-I* و*400* طن من المواد الأولية *RM-II* و *150* ساعة عمل / إسبوع . أما كلفة الطن الواحد من المواد الأولية *2000* و *4000* دينـار علـى التوالي وكلفة ساعة العمل الواحدة فهي *1000* دينار وتباع المكائن الأربعة فـي الأسـواق علـى التوالي *40000* و*60000* و*63000* و*45000* دينار / ملكنة . أوجد عدد المكائن الممكن إنتاجهـا من كل نوع لتعظيم الربح .

*( ans.: 65 , 20 , 0 , 0 , 1210000 )*

**6- حل النماذج الرياضية للبرمجة الخطية بإستخدام الطريقة البيانية :**

$$1)\quad \max.\ Z = 4X + 3Y$$
$$\text{s.t.}\quad 2X + 3Y \le 6,\quad -3X + 2Y \le 3,\quad 2Y \le 5,\quad 2X + Y \le 4,\quad X, Y \ge 0$$

$$2)\quad \max.\ Z = 3X + 2Y$$
$$\text{s.t.}\quad |Y - X| \le 2,\quad X + Y \ge 1,\quad X \le 4,\quad Y \le 3,\quad X, Y \ge 0$$

$$3)\quad \min.\ Z = 8X + 5Y$$
$$\text{s.t.}\quad X + 2Y \le 10,\quad X \ge 5,\quad Y \le 2,\quad X, Y \ge 0$$

$$4)\quad \min.\ Z = 2X + 3Y$$
$$\text{s.t.}\quad X + Y \le 15,\quad X + 2Y \ge 10,\quad X, Y \ge 0$$

*( ans.: (X,Y,Z): 1)(3/2,1,9) , 2)(4,3,18) , 3) (5,0,40) , 4) (0,5,15))*

**7- حل النماذج الرياضية للبرمجة الخطية الآتية :**

$$1)\quad \max.\ Z = 2X_1 + X_2 - 3X_3 + 5X_4$$
$$\text{s.t.}\quad X_1 + 7X_2 + 3X_3 + 7X_4 \le 46,\quad 3X_1 - X_2 + X_3 + 2X_4 \le 8,\quad 2X_1 + 3X_2 - X_3 + X_4 \le 10,\quad X_1, X_2, X_3, X_4 \ge 0$$

$$2)\quad \min.\ Z = X_1 - 3X_2 - 2X_3$$
$$3X_1 - X_2 + 2X_3 \le 7,\quad -2X_1 + 4X_2 \le 12,\quad -4X_1 + 3X_2 + 8X_3 \le 10,\quad X_1, X_2, X_3 \ge 0$$

*( ans.: 1) (0,12/7,0,34/7; 26) , 2) (78/25,114/25,11/10; -319/25))*

**8- حل النموذج الرياضي للبرمجة الخطية الآتي بإعتبار إن المتغيرات $X_4$ , $X_5$ , $X_6$ متغيرات أساسية في الحل الإبتدائي الأساسي المقبول (.S.B.F.S) :**

$$\max.\ Z = 3X_1 + X_2 + 2X_3$$
$$\text{s.t.}\quad 4X_1 + X_2 + 2X_3 + X_4 = 3,\quad 8X_1 + X_2 - 4X_3 + 2X_5 = 10,\quad 3X_1 - X_6 = 0,\quad X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \ge 0$$

*( ans.: (0,0,3/2,0,7/2,0;3))*

**9-حل نموذجي البرمجة الخطية التاليين :**

$$1)\quad \min.\ Z = 4X_1 + X_2$$
$$\text{s.t.}\quad 3X_1 + X_2 = 3,\quad 4X_1 + 3X_2 \ge 6,\quad X_1 + 2X_2 \le 3,\quad X_1, X_2 \ge 0$$

$$2)\quad \max.\ Z = X_1 + 5X_2 + 3X_3$$
$$\text{s.t.}\quad X_1 + 2X_2 + X_3 = 3,\quad 2X_1 - X_2 = 4,\quad X_1, X_2, X_3 \ge 0$$

بإعتبار $X_3$ متغيرأساسي في الجدول الأولي. *(ans.: 1) ( 3/5,6/5;18/5) , 2) (2,0,1;5))*

# الفصل الخامس

## نموذجي النقل والتخصيص

### 5-1- نموذج النقل Transportation Model :

يعتبر نموذج النقل من أهم نماذج البرمجة الخطية في المنشآت الصناعية ، إذ يعتبر مكملاً للعملية الإنتاجية بهدف إمدادها لما تحتاج إليه من مستلزمات الإنتاج في الوقت والمكان المحددين .

يبحث هذا النموذج نقل سلعة ما من عدد من المصادر المتمثلة بمراكز عرض (مراكز تجهيز المواد الأولية للمنشآت ) إلى مواقع مختلفة المتمثلة بمراكز الطلب ( المنشآت الصناعية ) بأقل التكاليف أو أقل زمن ممكن شرط أن يكون التجهيز عند كل مصدر والطلب عند كل موقع وكلفة نقل الوحدة الواحدة ( أو الزمن المستغرق لنقل الوحدات ) من كل مصدر إلى كل موقع معلومة ومحددة .

تعود الجذور التأريخية لنموذج النقل إلى عام ***1941*** عندما قدم هيتشكوك دراسته بعنوان "توزيع الإنتاج من عدة مصادر إلى مواقع مختلفة " وفي عام ***1947*** قدم كوبمانس دراسته بعنوان " الإستخدام الأمثل لمنظومة النقل " التي طورت من قبل دانتزك عام ***1963*** ، وفي عام ***1951*** درس دانتزك وأخرون طريقة التوزيع المعدل ***Modify Distribution method (MODI)*** للحصول على الحل الأمثل أما طريقة المسار المتعرج ***Stepping Stone*** فقد أقترحت من قبل شارنس و كوبر في عام ***1954*** . وفي عام ***1955*** توصل كوهن إلى حل مشكلة تخصيص المهام ***Assignment problem*** وهي حالة خاصة من مشكلة النقل وطورها كلٍ من فورد وفولكرسن في عام ***1957*** ، أما طريقة تقريب فوجل ***V.A.M.*** فقد أقترحت من قبل فوجل عام ***1958*** ، وطريقة ***R.A.M.*** فقد أقترحت من قبل روسيل في عام ***1968*** .

#### 5-1-2- مشكلة النقل بأقل كلفة The least cost transportation problem :

بإفتراض وجود $m$ من المصادر و $n$ من المواقع وإن :

$S_i$ تمثل عدد الوحدات المعروضة عند المصدر $i$ .

$D_j$ تمثل عدد الوحدات المطلوبة عند الموقع $j$ .

$C_{ij}$ تمثل كلفة نقل الوحدة الواحدة عند المسار $(i , j)$ الذي يربط المصدر $i$ بالموقع $j$ .

$X_{ij}$ تمثل عدد الوحدات المنقولة من المصدر $i$ إلى الموقع $j$ .

لذا فالهدف الرئيسي هو تحديد عدد الوحدات المنقولة من المصدر $i$ إلى الموقع $j$ بحيث تكون كلفة النقل الإجمالية أقل ما يمكن .

وبإفتراض إن الكلف خطية ، فنموذج البرمجة الخطية لمشكلة النقل يكون :