د- بإستخدام طريقة روسيل *RAM* :

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	*Supply*
S_1	2 **8**	3	4	5	0 **7**	**15**
S_2	3	2	5	2 **15**	0 **5**	**20**
S_3	4	1 **10**	2 **12**	3	0 **3**	**25**
Demand	**8**	**10**	**12**	**15**	**15**	**60**

الجدول النهائي لهذه الطريقة أستخرج إستناداً للجداول أدناه :

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
S_1	-7	-5	-6	-5	-5
S_2	-6	-6	-5	-8	-5
S_3	-4	-6	-7	-6	-4

تملأ الخلية X_{24} ويحذف الموقع C_4 :

	C_1	C_2	C_3	C_5
S_1	-6	-4	-5	-4
S_2	-6	-6	-5	-5
S_3	-4	-6	-7	-4

تملأ الخلية X_{33} ويحذف الموقع C_3 :

	C_1	C_2	C_5
S_1	-5	-3	-3
S_2	-4	-4	-3
S_3	-4	-6	-4

تملأ الخلية X_{32} ويحذف الموقع C_2 :

	C_1	C_5
S_1	-4	-2
S_2	-4	-3
S_3	-4	-4

تملأ الخلية X_{35} ويحذف المصدر S_3 :

	C_1	C_5
S_1	-3	-2
S_2	-3	-3

تملأ الخلية X_{25} ويحذف المصدر S_2 ، لذا تعطى القيم المتبقية للخليتين البـ اقيتين , X_{15} X_{11} لبقاء صف واحد .

$$T.T.C. = 2*8 + 0*7 + 2*15 + 0*5 + 1*10 + 2*12 + 0*3 = 80$$

ومما تقدم اعلاه ، نلاحظ إن الكلفة الإجمالية للنقل بإستخدام الطرق الأربعة كانت مختلفة وكالآتي :

الركن الشمالي الغربي (143) > الأقل كلفة (91) ≤ فوجل *VAM* (91) > روسيل *RAM* (80) .

لذا فغالباً ما تكون طريقة روسيل *RAM* هي الأفضل وتليها طريقة فوجل *VAM* .

إستناداً للحل الأولي *S.B.F.S.* الذي حصلنا عليه بالطريقة الثالثة *VAM* (بالرغم من إنه من الأفضل إستخدام الطريقة الرابعة *RAM* لكونها أفضل الطرق ، ولكن بسبب إستعراض طرق الحل الأمثل تم إختيار هذه الطريقة) ولغرض الوصول للحل الأمثل لابد من إستخدام إحدى الطريقتين التاليتين لإختبار وتحسين الحل وبعد تحقق الشرط الأساسي :

$$No.\ of\ basic\ cells = m+n-1 = 5+3-1=7$$

2- إيجاد الحل الأمثل *Optimal solution* : نستخدم إحدى الطريقتين :

أ- طريقة المسار المتعرج *Stepping stone* : وكما تطرقنا سابقاً ، نجد المسارات المتعرجة لكل الخلايا غير الأساسية وكذلك صافي الزيادة في الكلفة $\overline{C}_{ij}$ لكل مسار .

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	*Supply*
S_1	2 **0**	3	4	5	0 **15**	**15**
S_2	3 **5**	2	5	2 **15**	0	**20**
S_3	4 **3**	1 **10**	2 **12**	3	0	**25**
Demand	**8**	**10**	**12**	**15**	**15**	**60**

$$X_{12} \to X_{32} \to X_{31} \to X_{11} \quad : \quad \overline{C}_{12} = 3-1+4-2 = 4$$
$$X_{13} \to X_{33} \to X_{31} \to X_{11} \quad : \quad \overline{C}_{13} = 4-2+4-2 = 4$$
$$X_{14} \to X_{24} \to X_{21} \to X_{11} \quad : \quad \overline{C}_{14} = 5-2+3-2 = 4$$
$$X_{22} \to X_{32} \to X_{31} \to X_{21} \quad : \quad \overline{C}_{22} = 2-1+4-3 = 2$$
$$X_{23} \to X_{33} \to X_{31} \to X_{21} \quad : \quad \overline{C}_{23} = 5-2+4-3 = 4$$
$$X_{25} \to X_{15} \to X_{11} \to X_{21} \quad : \quad \overline{C}_{25} = 0-0+2-3 = -1$$
$$X_{34} \to X_{23} \to X_{21} \to X_{31} \quad : \quad \overline{C}_{34} = 3-2+3-4 = 0$$
$$X_{35} \to X_{15} \to X_{11} \to X_{31} \quad : \quad \overline{C}_{35} = 0-0+2-4 = -2\ most\ \ negative$$

لكون القيمة الأكثر سالبية هي $\overline{C}_{35}$ لذا فالمتغير الداخل *entering variable* هو المتغير X_{35} . أما المتغير الخارج *leaving variable* فيتحدد من المسار المتعرج للمتغير الداخل : $X_{35}^{+} \rightarrow X_{15}^{-} \rightarrow X_{11}^{+} \rightarrow X_{31}^{-}$ والذي له أقل كمية نقل X_{ij} من الخلايا الـ سالبة ، أي إن المتغير X_{31} سيكون هو المتغير الخارج ، لذا فالجدول الجديد سيكون كما يلي :

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	*Supply*
S_1	2 / 3	3	4	5	0 / 12	15
S_2	3 / 5	2	5	2 / 15	0	20
S_3	4	1 / 10	2 / 12	3	0 / 3	25
Demand	8	10	12	15	15	60

$T.T.C. = 6 + 0 + 15 + 30 + 10 + 24 + 0 = 85$

No. of basic cells $= 5 + 3 - 1 = 7$

$$X_{12} \rightarrow X_{32} \rightarrow X_{35} \rightarrow X_{15} \quad : \quad \overline{C}_{12} = 3 - 1 + 0 - 0 = 2$$
$$X_{13} \rightarrow X_{33} \rightarrow X_{35} \rightarrow X_{15} \quad : \quad \overline{C}_{13} = 4 - 2 + 0 - 0 = 2$$
$$X_{14} \rightarrow X_{24} \rightarrow X_{21} \rightarrow X_{11} \quad : \quad \overline{C}_{14} = 5 - 2 + 3 - 2 = 4$$
$$X_{22} \rightarrow X_{32} \rightarrow X_{35} \rightarrow X_{15} \rightarrow X_{11} \rightarrow X_{21} \quad : \quad \overline{C}_{22} = 2 - 1 + 0 - 0 + 2 - 3 = 0$$
$$X_{23} \rightarrow X_{33} \rightarrow X_{35} \rightarrow X_{15} \rightarrow X_{11} \rightarrow X_{21} \quad : \quad \overline{C}_{23} = 5 - 2 + 0 - 0 + 2 - 3 = 2$$
$$X_{25} \rightarrow X_{21} \rightarrow X_{11} \rightarrow X_{15} \quad : \quad \overline{C}_{25} = 0 - 3 + 2 - 0 = -1 \quad \textit{negative}$$
$$X_{31} \rightarrow X_{11} \rightarrow X_{15} \rightarrow X_{35} \quad : \quad \overline{C}_{31} = 4 - 2 + 0 - 0 = 2$$
$$X_{34} \rightarrow X_{24} \rightarrow X_{21} \rightarrow X_{11} \rightarrow X_{15} \rightarrow X_{35} \quad : \quad \overline{C}_{34} = 3 - 2 + 3 - 2 + 0 - 0 = 2$$

لذا فالمتغير الداخل هو X_{25} والمتغير الخارج سيكون X_{21} ، وعليه فالجدول الجديد سيكون :

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	*Supply*
S_1	2 / 8	3	4	5	0 / 7	15
S_2	3	2	5	2 / 15	0 / 5	20
S_3	4	1 / 10	2 / 12	3	0 / 3	25
Demand	8	10	12	15	15	60

$T.T.C. = 16 + 0 + 30 + 0 + 10 + 24 + 0 = 80$

No. of basic cells $= 7$

$$X_{12} \to X_{32} \to X_{35} \to X_{15} \quad : \quad \overline{C}_{12} = 3-1+0-0 = 2$$
$$X_{13} \to X_{33} \to X_{35} \to X_{15} \quad : \quad \overline{C}_{13} = 4-2+0-0 = 2$$
$$X_{14} \to X_{24} \to X_{25} \to X_{15} \quad : \quad \overline{C}_{14} = 5-2+0-0 = 3$$
$$X_{21} \to X_{25} \to X_{15} \to X_{11} \quad : \quad \overline{C}_{21} = 3-0+0-2 = 1$$
$$X_{22} \to X_{32} \to X_{35} \to X_{25} \quad : \quad \overline{C}_{22} = 2-1+0-0 = 1$$
$$X_{23} \to X_{33} \to X_{35} \to X_{25} \quad : \quad \overline{C}_{23} = 5-2+0-0 = 3$$
$$X_{31} \to X_{35} \to X_{15} \to X_{11} \quad : \quad \overline{C}_{31} = 4-0+0-2 = 2$$
$$X_{34} \to X_{35} \to X_{25} \to X_{24} \quad : \quad \overline{C}_{34} = 3-0+0-2 = 1$$

لعدم وجود قيمة سالبة لقيم $\overline{C}_{ij}$ لذا فالحل أمثل وعليه فإنه :

يجهز الخزان الأول المدينة الأولى *8* مليون لتر من الماء الصافي .

يجهز الخزان الثاني المدينة الرابعة *15* مليون لتر من الماء الصافي .

يجهز الخزان الثالث المدينتين الثانية والثالثة بالمقادير *10* و*12* مليون لتر من الماء الصافي على التوالي.

2- طريقة المضاعفات *Multipliers method* : وكما ذكرنا سابقاً ، نجد قيم V_j , U_i من العلاقة التالية : $U_i + V_j = C_{ij}$ للخلايا الأساسية ، وبإفتراض إن : $U_1=0$ ، وإستناداً للحل الأولي المستخرج بطريقة *VAM* فإن :

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	*Supply*
S_1	2 **0**	3	4	5	0 **15**	**15**
S_2	3 **5**	2	5	2 **15**	0	**20**
S_3	4 **3**	1 **10**	2 **12**	3	0	**25**
Demand	**8**	**10**	**12**	**15**	**15**	**60**

T.T.C. = 91 and no. of basic cells = 7

$$C_{11} = U_1 + V_1 = 2 \overset{U_1=0}{\Rightarrow} V_1 = 2$$
$$C_{15} = U_1 + V_5 = 0 \overset{U_1=0}{\Rightarrow} V_5 = 0$$
$$C_{21} = U_2 + V_1 = 3 \overset{V_1=2}{\Rightarrow} U_2 = 1$$
$$C_{24} = U_2 + V_4 = 2 \overset{U_2=1}{\Rightarrow} V_4 = 1$$
$$C_{31} = U_3 + V_1 = 4 \overset{V_1=2}{\Rightarrow} U_3 = 2$$
$$C_{32} = U_3 + V_2 = 1 \overset{U_3=2}{\Rightarrow} V_2 = -1$$
$$C_{33} = U_3 + V_3 = 2 \overset{U_3=2}{\Rightarrow} V_3 = 0$$