المعادلات التفاضليه

الدكتور: اسامه محمد

المرحلة : الثانيه

Chapter One

المعادلات التفاضلية

Ordinary Differential Equations

why we study DE??? سؤال /لماذا ندرس المعادلات التفاضلية ؟؟؟

يمكن القول دون تجاوز او المبالغ أن المعادلات التفاضلية تمثل المكانة المرموقة في كل فروع العلوم الهندسية و الفيزيائية حيث اغلب العلاقات والقوانين الحاكمة بين متغيرات مسألة فيزيائي أو هندسية تظهر على صورة معادلة تفاضليه (DE) ولفهم هذه المسألة فلابد من حل هذه المعادلة التفاضلية او على الاقل معرفت كثير من خصائص هذا الحل ولفهم هذه المسألة فلابد من حل هذه المعادلة التفاضلية او على الاقل معرفت كثير من خصائص هذا الحل وأن إستعصى الحصول عليه صراحة وعليه الحصول على الحل ليست دوما في المسألة اليسيرة بل أن اكثر من المعادلات التفاضلية غير قابل للحال لقد استحوذ هذا الأمر على اهتمام الرياضيون منذ بداية علم التفاضل في القرن السابع عشر سواء من ناحية دراسته وجود الحل أو من ناحية خصائص وطبيعهته أو من ناحية الحصول عليه ولم يقف الرياضي طويلا أمام المعادلات التفاضلية التي يصعب حلها على صورة مغلقة بل تجاوز ذلك إلى الحل التقريبي والحل العدد

من المواضيع المهمة لكثره تطبيقاتها في الفيزياء والكيمياء والعلوم (ODE) تعتبر المعادلة التفاضلية الاعتيادية والهندسة واغلب العلوم الاخرى ونظرا لارتباطها الوثيق بالمشتقة والتي تعرف عند حدوث اي تغير لذا فانه اي حركة او اي تغير في الحياه سيعبر عنه بالنهاية بمعادله تفاضليه

اول من عرف المعادلة التفاضلية الاعتيادية هوه العالم الالماني لبينز عام 1676م حيث عبر عنها بالعلاقة (المعادلة التي تتضمن داله مجهولة ومشتقاتها بالنسبة لمتغير مستقل)

توضيح

Closed form solution (closed _ form expression)
Is a mathematical expression expressed using a finite number of standarl operations . it may constrain constants, variables, cetin "well known'' operations (e.g., +, -, x, /) and functions (e.g. nth root, exponent, logarithrm,trigonometric functions , and inverse hy perbolic function
The set of operations and functions admitted in a closed – form expression may vary with author and
context.

EX/ $\frac{5+log\ x}{\sqrt{x}}$

الصيغه العامه للمعادله التفاضليه الاعتياديه من الرتبه n تكون بالشكل التالي

$$A_0 y^{(n)} + A_1 y_+^{(n-1)} + \cdots + A_{(n-1)} y, + A_n y = f(x)$$

Differential Equations

المعادله التفاضليه is an equation which involives derivatives بعباره اخرى هي علاقه بين المتغير التابع والمتغير المستقل
تدخل فيها المشتقات او التفاضلات وتسمى معادله تفاضليه عاديه (ordinary) اذا كان متغير تابع داله في متغير مستقل واحد وبالتالي لاتحتوي الا على مشتقات عاديه

ايضا يمكن تعريف معادله التفاضليه العاديه كالاتي :

Def : equation which contains the derivatives of differtontial

is called ordinary differential equation (ode) ⟶ $\left(\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots y', y'', dx, dy\right)$

Exam/ 1) $\frac{dy}{dx} = x + 5$ 2) $\frac{d_y^2}{\partial x^2} + \frac{3\,dy}{dx} + 2y = 0$

3)$xy' + y = 3$ 4) $y''' + 2(y''')^2 + y' = cos\, x$

5)$(y'')^2 + (y')^3 + 3y = x^2$

If there is a single independent valuable as in (1-5) the derivatives are ordinary derives and the equation is called an ordinary equation

اي بمعنى اذا احتوت المعادله التفاضليه متغيرا مستقل واحد كما في (1-5) فان لبمشتقات بها تكون مشتقات عاديه وتسمى المعادله التفاضليه العاديه

If there are two or male independent valuables as in (6-7) the derivatives are pallial derivatives and the equation is called palatial differential equation

Ex/ 6) $\frac{\partial z}{\partial x} = z + x\frac{\partial z}{\partial y}$ 7)$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 + y$

اي بمعنى اخر اذا احتوت المعادله التفاضليه اثنين او اكثر من المتغيرات المستقله كما في المثالين (6-7) فان المشتقات التي تحتويهما هذه المعادله تكون مشتقات جزيه وتسمى هذه المعادله بالمعادله التفاضليه الجزيه

المزيد من الامثله * * * * * * *

ex/

1)$x\frac{d^3y}{dx^3} + (2\,sin\,x)\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dy}{dx} = (3 - x^2)y$ 2) $\frac{d^y}{dx} + y = 3x^2$

3) $(x - y)dx + (x + y)dy = 0$ 4) $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + y = 0$

ملاحظه: كثيرا ما نستخدم الشرطه المائله للداله على المشتقه العاديه فمثلا

المشتقه الاولى للمتغير y بالنسبه الى x هي $y' = \frac{dy}{dx}$ المشتقه الثانيه $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$

المشتقه الثالثه تكتب على صور dx³ /d³y = y'''

والمشتقات العليا تكرار الشرطه فتكتب المشتقه علـى الصوره. $y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$

حيث توضع مرتبه المشتقه اعلى المتغير وبين قوسين لتميزها عن االس وعلى ذلك y اس 4 .تعني المشتقه الرابعه وy

اس 5 .تعني المشتقه الخامسه. وهكذا وعليه يمكن كتابه المعادله 2 على . صوره.

$$xy''' + (2\sin x)y''y' = (3 - x^2)y$$

والان نعطي مزيدا من الامثله بتعريفها عن المعادله التفاضليه الجزئيه بعد التذكير

هي معادله تفاضليه فيها المتغير التابع داله لا اكثر مـن متغير مستقل اي تضـهر فيها المشتقات الجزئيه.

Examples: -

يكون vالمتغير التابع و z,y,x المتغيرات المستقله. فاالعلاقات التاليه هي معادالت تفاضليه جزئيه:

Dv/dx +3.dv/dy =0 -1

D²v/dx² +d²v/dx² + d²x/dz² =f(x,y,z) -2

x².d²v/dxdy + 3y. dv/dx +(x-y²)v =0-3

*eqution *

The order of a differentione lvis the order of the highest derivativ whiel occurs. Namely, (the

(order of the (ODE) is the highest derivative in the equation .

• بمعنى: رتبه المعادله التفاضليه هي المشتقه االعلى الذي يقع فيها.

Ex/ 1) $\frac{dy}{dx} = x + 5$ 2)$xy' + y = 3$

3)$\frac{\partial z}{\partial x} = z + x\frac{\partial z}{\partial y}$ are of the first order 4)$\frac{d^2y}{\partial d} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$

5) $(y'')^2 + (y')^3 + 3y = x^2$ 6) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 + y$ are of second order

7) $y''' + 2(y'')^2 + y' = cos\, x$ are of the third order

* * * * * *

The order of a differential equation which can be written as a polynomial in the derivatives is the degree of the highest order derivative which then occurs. Namely (the degree of ODE is the highest power of the highest derivative).

بمعنى : اذا كتبت معادله تفاضليه في المشتقات فان درجه هذه المعادله هي درجه المشتقه الاعلى رتبه الوارده في هذه المعادله .

Ex / 1) $\frac{dy}{dx} = x + 5$ 2) $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$

3) $xy' + y = 3$ 4) $y''' + 2(y'')^2 + y' = cos\, x$

5) $\frac{\partial z}{\partial x} = z + x\frac{\partial z}{\partial y}$ 6) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2_{+y}$

All of the above examples are of the first degree and

7) $(y'')^2 + (y')^3 + 3y = x^2$ is of the second degree

For the present, only ordinary differential equations with a singl. Ddipendent variable will be considered. A discussion of partial diffrlerential equations will be given in the next year at the thirol class

اي بمعنى: - االن سوف ندرس فقط المعادالت التفاضليه ذات المتغير المستقل الواحد، اما دراسه المعادالت التفاضله الجزئيه فسوف ندرسها في العام القادم في الصف الثالث.

المعادله التفاضليه الخطيه)Liner( )

هي المعادله الخطيه في المتغير التابع ومشتقا ه جميعا.

Example 1. X²y''+xý+X²Y=e^x sin x

هي معادله تفاضليه خطيه من الرتبه الثانيه حيث ان كل منهما متغير تابع y ومشتقاته ý خطيه اي كل منهما مرفوع لالس واحد ولا توجد حواصل ضرب مشتركه فيما بينها ولا يهم ان تكون معاملاتها ثوابت او دوال في x

*مالحضه: أإذاإأ لم تكن المعادله التفاضليه)DE(خطيه) Linear)فأنها معادله تفاضليه آل خطيه)Linear non(

Example 2 المعادال ت التفاضليه التاليه معادالت تفاضليه غير اعتياديه

-1 yy''+y'=x

-2 ý+X√y=sin x

-3 y'''+x^2y''+sin y =0

حيث تضهر الخطيه المعادله 1 في حاصل الضرب بين yو"y بينما المعادله 2 تضهر في الحد. Y مرفوع الس يختلف عن الوضع في المعادله 3 تظهر في الحد siny وهي داله الخطيه في y

ملاحظه : لا توثر اللاخطيه على مرتبه المعادله التفاضليه , فالمعادله (1) لاخطيه من الرتبه الثانيه .

و المعادله (2) لا خطيه من الرتبه الاولى . والمعادله (3) لا خطيه من الرتبه الثالثه .

الان نعود مره اخرى لنذكر الصوره العامه للمعادله التفاضليه الخطيه من الرتبه n هي بصيغه مشابهه لما ذكر في صفحه الثانيه

$$p_n(x)y^{(n)} + p_{n-1}(x)y_+^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y, + p_0(x)y = Q(x)$$

On more shortly , $\sum_{i=0}^{n} P_i(x)y^{(i)} = Q(x)$

حيث المتغير التابع y وجميع مشتقاته مرفوعه للاس واحد ولا توجد حواصل ضرب مشاركه بين اي منها والدوال المعاملات $P_i(x)$ هي دوال في x خطيه ام غير خطيه وكذالك بالنسبه للداله Q(x)