Example 3 :- Solve the following ODE .

$$\left(x\sin\frac{y}{x}-y\cos\frac{y}{x}\right)dx+x\cos\frac{y}{x}\,dy=0\,.$$

Sol :-

بالقسمة على x نحصل على :

$$\left(\sin\frac{y}{x}-\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dx+\cos\frac{y}{x}\,dy=0$$

$$Let\ \frac{y}{x}=v\implies y=v\,x\implies dy=v\,dx+x\,dv$$

$$(sinV-Vcosv)dx+cosvdy=0$$

$$(sinv-Vcosv)dx+cosv(vdx+xdv)=0$$

$$sinvdx-Vcosvdz+Vcosvdx+xcosvdv=0$$

$$\frac{dx}{x}+\frac{cosv}{sinv}dv=0$$

$$Lnx+\ln(sinv)=lnc$$

$$\ln(xsinv)=lnc\ \ =>\ xsin\left(\frac{x}{y}\right)=c$$

$$sin\frac{y}{x}=\frac{c}{x}\ \ =>\ \ sin\frac{y}{x}-\frac{c}{x}=0$$

ملاحظة: - هناك بعض المعادلات يمكن ان تحل بطريقه الفصل وبطريقه المعادلات المتجانسة مثل

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$$

يقصد بالتجانس أيضا هنا هو تساوي قوى x وy في كل حد من حدود المعادلة

A lso we define the homogeneous ODE as following: The (ODE) is Called Homogeneous iff M and N are Homogeneous of the same degree.

- Note:1dy/dx= ? ,2) let y=v.x ⇒ dy/dx=F(v)
- dx/x + dv/v−f(v)=0 , 4) V= y/x (3
-
- Example : $(x^2+y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$
-
- sol: $M=x^2+y^2 \Rightarrow M(\lambda x,\lambda y) = \lambda^2x^2+\lambda^2y^2 = \lambda^2(x^2+y^2)$
- $N=2xy \Rightarrow N(\lambda x,\lambda y)= 2\lambda x\lambda y = \lambda^2(2xy)$
-
- $dy/dx = -x^2-y^2 / 2xy$ (1
-
- let y= v x $\Rightarrow dy/dx = -x^2-v^2x^2/ 2xvx = x^2(-1-v^2)/2vx^2 = -1-v^2/ 2v$ (2 $\Rightarrow F(v)$
- $\Rightarrow dx/x + dv/v-f(v)=0$ (3
- $dx/x + dv/v-(-1-v^2)/2v=0$
- $\Rightarrow dx/x + dv/2v^2+1+v^2/2v =0$
- $dx/x + 2v/3v^2+1dv=0$
- $\int dx/x + \int 2v/3v^2+1\,dv =0 \Rightarrow \ln x + 1/3 \ln|3v^2+1|=C$

$\ln x + 1/3 \ln|3\,y^2/x^2 + 1| = C$

Example :-

$$\left(xy\cos\frac{y}{x} + y^2\sin\frac{y}{x}\right)dx + \left(x^2\cos\frac{y}{x} - xy\sin\frac{y}{x}\right)dy = 0$$

Sol :- $M = xy\cos\frac{y}{x} + y^2\sin\frac{y}{x}$

$$M_{(\lambda_x,\lambda_y)} = \lambda_x\lambda_y\cos\frac{\lambda y}{\lambda x} + \lambda^2y^2\sin\frac{\lambda y}{\lambda x} = \lambda^2\left[xy\cos\frac{y}{x} + y^2\sin\frac{y}{x}\right]$$

$$= \lambda^2 M_{(x,y)}$$

$$N = x^2\cos\frac{y}{x} - xy\sin\frac{y}{x}$$

$$N_{(\lambda_x,\lambda_y)} = \lambda^2x^2\cos\frac{\lambda y}{\lambda x} - \lambda_x\lambda_y\sin\frac{\lambda y}{\lambda x} = \lambda^2\left[x^2\cos\frac{y}{x} - xy\sin\frac{y}{x}\right]$$

$$= \lambda^2 N_{(x,y)}$$

1) $$\frac{dy}{dx} = \frac{-xy\cos\frac{y}{x} - y^2\sin\frac{y}{x}}{x^2\cos\frac{y}{x} - xy\sin\frac{y}{x}}$$

2) $$Let\ y = vx \implies \frac{dy}{dx} = \frac{-x\,vx\cos\frac{vx}{x} - v^2x^2\sin\frac{vx}{x}}{x^2\cos\frac{vx}{x} - x\,vx\sin\frac{vx}{x}}$$

$$= \frac{x^2(-v\cos v - v^2\sin v)}{x^2(\cos v - v\sin v)}$$

$$= \frac{-v\cos v - v^2\sin v}{\cos v - v\sin v} = F_{(v)}$$

3) $$\boldsymbol{\frac{dx}{x} + \frac{dv}{v - F_{(v)}} = 0}$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{dv}{\frac{-v\,cosv\ - v^2sinv}{cosv - vsinv}} = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{dv}{\frac{vcos - v^2sinv + vcosv + v^2sinv}{cosv - vsinv}} = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{cosv - vsinv}{2vcos}dv = 0$$

$$\int\frac{dx}{x} + \int\frac{cosv}{2vcosv}dv - \int\frac{vsinv}{2vcosv}dv = \int 0$$

$$\ln x + \frac{1}{2}\int\frac{dv}{v} - \frac{1}{2}\int tanv\,dv = c$$

$$\ln x + \frac{1}{2}\ln[v] - \frac{1}{2}\ln[secv] = c$$

$$\ln x + \frac{1}{2}\ln\left[\frac{y}{x}\right] - \frac{1}{2}\ln\left[\sec\frac{y}{x}\right] = c$$

في النهاية نستطيع ان نلخص ما يلي فهو ان المعادلة التفاضلية المتجانسة تكون كذلك (أي متجانسة) اذا كان مجموع أسس المتغيرات(X) و (Y) متساوية في كل واحد.

قد تكون المعادلة التفاضلية ليست قابلة لفصل المتغيرات ولكن في الوقت نفسه نستطيع تحويلها الى معادلة قابلة للفصل وذلك باستخدام بعض التحويلات و منها المعادلة المتجانسة و هي المعادلة التي يمكن كتابتها بصورة $\frac{dy}{dx} = f(\frac{y}{x})$ ريقة حل المعادلة المتجانسة تتخلص بالخطوات التالية

1- نكتب المعادلة بصورة .....

2- نفرض $v = \frac{y}{x}$ و نعوضها في المعادلة رقم (1) فنحصل على معادلة رقم (2)

3-نشتق العلاقة $y = vx$ بالنسبة الى x فنحصل على (3)

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v \ \ldots..(3)$$

4- نعوض معادلة (3) في معادلة (2) فنحصل على

$$x\frac{dy}{dx} + v = f(v) \rightarrow x\frac{dy}{dx} = f(v) - v$$

5- بفصل المتغيرات نحصل على

$$\frac{dy}{f(v) - v} = \frac{dy}{x}$$

6- تكامل الطرفين

$$\int \frac{dy}{f(v)-v} = \int \frac{dx}{x}$$

7- نعوض $v = \frac{y}{x}$ في ناتج التكامل فنحصل على حل المعادلة بدلالة x, y

Example : $(y^2 - yx)dx + x^2dy = 0, \text{solre}$

the ode in above using homogeneous methol

Sol $x^2dy = -(y^2 - xy)dx$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(y^2 - xy)}{x^2} \dots\dots.(1) \; let \; y = xv \dots.(2)$$

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v \dots\dots(3)$$

نعوض (2) و (3) في المعادلة (1)

$$x\frac{dv}{dx} + v = \frac{-(x^2v^2 - x^2v)}{x^2}$$

$$x\frac{dv}{dx} + v = -v^2 + v$$

$$\rightarrow \int \frac{dv}{-v^2} = \int \frac{dx}{x} x\frac{dv}{dx} = -v^2$$

v=ln|x|+c ⇒ χ/γ=ln|x|+C 1/

y=x/ln|x|c

.....

Ex: 30fve the following ODE

ydx=(x+√y²-x²) dy

:sol

dy/dx=y/(x+√y²+x²)

let: $y=xv \Rightarrow dy/dx=v+dv/dx$

$v+xdv/dx=xv/(x+\sqrt{x^2v^2-x^2})$

$v+x\ dv/dx=v/(1+\sqrt{v^2-1})$

$x\ dv/dx=v/(1+\sqrt{v^2-1})-v$

$x\ dv/dx=v-v-v\sqrt{v^2-1}/1+\sqrt{v^2-1}$

$xdv/dx=-v\sqrt{v^2-1}/1+\sqrt{v^2-1}$

$v^2-1/-v\sqrt{v^2-1}\ dv=dx\sqrt{}+1$

$1/v=Lx|+C$ »»

$x/y=Ln|x|+C.$

$y=x/Ln/x|+C.$

Example - Solve the following ODE

.$Ydx=(x_\sqrt{}\ y^2-\sqrt{}x^2)dy$

Soll

let $y=xv$ »» $dy/dx=v+dv/dx.$

$V+x\ dv/dx=xv/(x+\sqrt{}x^2\ v^2-x^2)$

.$V+x\ dv/dx=V/(1+\sqrt{}v^2-1)$

$(v*\sqrt{}(v^2-1)-)/((v^2-1)\sqrt{}+\underline{1})$

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{y^3+3x^2y}{x^3+3xy^2}$

2. $x(x-y)dy + y^2dx = 0$.

3. $y^2 + x^2\frac{dy}{dx} = x\frac{dy}{dx}$.

4. $(x^2 - y^2)dx - 2xy\,dy = 0$.

5. $\left(xsin\frac{y}{x} - ycos\frac{y}{x}\right)dx + xcos\frac{y}{x}dy = 0$.

6. $x\left(\frac{dy}{dx} - \tan\frac{y}{x}\right) = y$.

7. $xy^2dy - (x^3 + y^3)dx = 0$.

* * *