معادلات تفاضلية اعتيادية تؤول الى معادلات مُتجانسة

تكون هذه المعادلات التفاضلية الاعتيادية على صورة (1)

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2} \dots (1)$$

حيث $\boldsymbol{a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2}$ ثوابت فإذا كان $\boldsymbol{c_1 = c_2 = 0}$ فإن المعادلات التفاضلية تمثل معادلات تفاضلية مُتجانسة ويمكن حلها كما في الحل السابق وأما اذا كانت $\boldsymbol{c_1 \neq c_2 \neq 0}$ فهنا توجد حالتين:

الحالة الأولى :- إذا كان المستقيمان متقاطعان .

الخطوات :

1) نضع المستقيمان بالشكل التالي:

$$\begin{matrix} \boldsymbol{a_1x + b_1y + c_1 = 0} \\ \boldsymbol{a_2x + b_2y + c_2 = 0} \end{matrix} .$$

2) فإذا كان $\begin{vmatrix} \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{b_1} \\ \boldsymbol{a_2} & \boldsymbol{b_2} \end{vmatrix} \neq \boldsymbol{0}$ فإن المستقيمان مُتقاطعان

3) نفترض ان نقطة التقاطع (h, k) ونستخدم التعويض

$$\left.\begin{matrix} x = u + h \\ y = v + k \end{matrix}\right\} = \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du}$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{a_1(u + h) + b_1(v + k) + c_1}{a_2(u + h) + b_2(v + k) + c_2}$$

وبما ان (h, k) نقطة التقاطع المستقيمان أي انها تقع على كل مستقيم وعليه فإن:

$$\begin{matrix} a_1h + b_1k + c_1 = 0 \\ a_2h + b_2k + c_2 = 0 \end{matrix}$$

وعليه تكون المعادلة

$$\frac{dv}{du} = \frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}$$

وهذه معادلة تفاضلية مُتجانسة في متغيرين v,u ويمكن حلها بنفس اسلوب المتجانسة .

* * *

Example *:- Find the general solution for the following ODE .*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y - 3}{x + y - 2}$$

Sol :-

$$\begin{aligned} 2x + y - 3 &= 0 \\ x + y - 2 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$$

المستقيمان متقاطعان

$$\begin{aligned} 2x + y - 3 &= 0 \\ x + y - 2 &= 0 \end{aligned}$$

$$x - 1 = 0 \implies x = 1 \,, y = 1$$

∴ نقطة التقاطع $(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k}) = (\mathbf{1}, \mathbf{1})$ **.**

$$Let \quad \left.\begin{aligned} x &= u + 1 \\ y &= v + 1 \end{aligned}\right\} \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du}$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{2(u+1) + v + 1 - 3}{(u+1) + (v+1) - 2} \implies \frac{dv}{du} = \frac{2u + v}{u + v}$$ (معادلة متجانسة)

$$Let \;\; v = zu \implies \frac{dv}{du} = z + u\frac{dz}{du}$$

$$z + u\frac{dz}{du} = \frac{2u + zu}{u + zu}$$

$$u\frac{dz}{du} = \frac{2+z}{1+z} - z$$

$$u\frac{dz}{du} = \frac{2 + z - z - z^2}{z+1}$$

$$\frac{z+1}{2 - z^2}dz = \frac{du}{u}$$

$$\int \frac{z}{2 - z^2} + \frac{1}{2 - z^2}dz = \int \frac{du}{u}$$

$$\frac{1}{2 - z^2} = \frac{A}{\sqrt{2} - z} + \frac{B}{\sqrt{2} + z}$$

$$1 = A(\sqrt{2} + z) + B(\sqrt{2} - z)$$

$$A = \frac{1}{2\sqrt{2}} \,, B = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$-\frac{1}{2}Ln|2-z^2|-\frac{1}{2\sqrt{2}}Ln|\sqrt{2}-z|+\frac{1}{2\sqrt{2}}Ln|\sqrt{2}+z|=Ln|u|+c$$

$$-\frac{1}{2}Ln\left|2-\frac{v^2}{u^2}\right|-\frac{1}{2\sqrt{2}}Ln\left|\sqrt{2}-\frac{v}{u}\right|+\frac{1}{2\sqrt{2}}Ln\left|\sqrt{2}+\frac{v}{u}\right|=Ln|x-1|+c$$

$$-\frac{1}{2}Ln\left|2-\frac{(y-1)^2}{(x-1)^2}\right|-\frac{1}{2\sqrt{2}}Ln\left|\sqrt{2}-\frac{y-1}{x-1}\right|+\frac{1}{2\sqrt{2}}Ln\left|\sqrt{2}+\frac{y-1}{x-1}\right|=$$

$$Ln|x-1|+c$$

* * *

Example:- Find the general solution of the following ODE .

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y-3}{x-y-1}$$

Sol:

$$\begin{aligned} x+y-3&=0\\ x-y-1&=0 \end{aligned} \qquad \begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-1-1=-2\neq 0$$

المستقيمان متقاطعان

$$\begin{aligned} x+y-3&=0\\ x-y-1&=0 \end{aligned}$$

$$2x-4=0 \implies x=2\,,y=1$$

نقطة التقاطع (h,k) = (2,1)

$$Let \left.\begin{aligned} x&=u+2\\ y&=v+1 \end{aligned}\right\} \frac{dy}{dx}=\frac{dv}{du}$$

$$\frac{dv}{du}=\frac{(u+2)+v+1-3}{(u+2)-(v+1)-1} \implies \frac{dv}{du}=\frac{u+v}{u-v} \qquad (Homogeneous\ eq.)$$

$$Let\ \ v=2u \implies \frac{dv}{du}=z+u+\frac{dz}{du}$$

$$z + u\frac{dz}{du} = \frac{u + zu}{u - zu}$$

$$u\frac{dz}{du} = \frac{1+z}{1-z} - z = \frac{1 + z - z(1-z)}{1-z} = \frac{1 + z - z + z^2}{1-z} = \frac{1+z^2}{1-z}$$

$$\frac{1-z}{1+z^2}dz = \frac{du}{u}$$

$$\int \frac{dz}{1+z^2} - \int \frac{z}{1+z^2}dz = \int \frac{du}{u}$$

$$tan^{-1}z - \frac{1}{2}Ln|1+z^2| = Ln|u| + c$$

$$tan^{-1}\frac{v}{u} - \frac{1}{2}Ln\left|1 + \frac{v^2}{u^2}\right| = Ln|x-2| + c$$

$$tan^{-1}\frac{y-1}{x-2} - \frac{1}{2}Ln\left|1 + \frac{(y-1)^2}{(x-2)^2}\right| = Ln|x-2| + c$$

الحالة الثانية : إذا كان المستقيمان مُتوازيان

ملاحظة: يكون المستقيمين متوازيين إذا كان المحدد لهما = صفر

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad a_1b_2 - a_2b_1 = 0$$

وفي هذه الحالة نستخدم التعويض الاكثر سهولة

$$z = a_1x + b_1y$$
$$or\ z = a_2x + b_2y$$

فتحول المعادلة التربيعية الاعتيادية رقم (1) الى معادلة تفاضلية تحل بطريقة فصل التغيرات.

Example: $-$ *Find the general solution for the ODE .*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y-5}{x+y+1}$$

Sol:

$$\begin{matrix} x + y - 5 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{matrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$$

فإن المستقيمين متوازيين

$$Let\ \ z = x + y \ \Longrightarrow y = z - x$$

$$\Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1$$

$$\Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x + y - 5}{x + y + 1}$$

$$\Longrightarrow \frac{dz}{dx} - 1 = \frac{z - 5}{z + 1} \Longrightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{z - 5}{z + 1} + 1 = \frac{z - 5 + z + 1}{z + 1}$$

$$\Longrightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{2z - 4}{z + 1} \Longrightarrow \frac{z + 1}{2z - 4} dz = dx \Longrightarrow \frac{z + 1}{2(z - 2)} dz = dx$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2} \int \frac{z}{z - 2} + \frac{1}{z - 2} dz = \int dx$$

$$\Longrightarrow \int \frac{z - 2 + 2}{z - 2} + \frac{1}{z - 2} dz = 2 \int dx$$

$$\Longrightarrow \int \frac{z - 2}{z - 2} + \frac{2}{z - 2} + \frac{1}{z - 2} dz = 2 \int dx$$

$$\Longrightarrow \int 1 + \frac{3}{z - 2} dz = 2 \int dx$$

$$\Longrightarrow z + 3Ln|z - 2| = 2x + c$$

$$\Longrightarrow x + y + 3Ln|x + y - 2| = 2x + c$$

$$\Longrightarrow x + y + Ln(x + y - 2)^3 = 2x + c$$

$$\Longrightarrow y = x - Ln(x + y - 2)^3 + c$$

Example: *Find the general solution for the following ODE .*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y - 1}{4x + 2y + 5}$$

Sol:

$$2x + y - 1 = 0$$
$$4x + 2y + 5 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$$

فإن المستقيمين مُتوازيين

$$Let \;\; z = 2x + y \;\Longrightarrow y = z - 2x$$

$$\Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y - 1}{2(2x + y) + 5} \Longrightarrow \frac{dz}{dx} - 2 = \frac{z - 1}{2z + 5}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z - 1}{2z + 5} + 2 \Longrightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{z - 1 + 4z + 10}{2z + 5}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{5z + 9}{2z + 5} \Longrightarrow \frac{(2z + 5)}{(5z + 9)}\, dz = dx$$

$$\int \frac{5(2z + 5)}{5(5z + 9)}\, dz = \int dx \;\Longrightarrow \int \frac{10z + 25}{5(5z + 9)}\, dz = \int dx$$

$$\Longrightarrow \int \frac{10z + 18 + 7}{5(5z + 9)}\, dz = \int dx$$

$$\Longrightarrow \int \frac{2(5z + 9)}{5(5z + 9)} + \frac{7}{5(5z + 9)}\, dz = \int dx$$

$$\Longrightarrow \int \frac{2}{5} + \frac{7}{25} \cdot \frac{5}{5z + 9}\, dz + \int dx$$

$$\Longrightarrow \frac{2}{5} z + \frac{7}{25}\, Ln|5z + 9| = x + c$$

$$\Longrightarrow \frac{2}{5}\,(2x + y) + \frac{7}{25}\, Ln|10x + 5y + 9| = x + c$$

Example :- Find the general solution for the following ODE .

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x + 3y + 2}{3x + 2y + 1}$$

Sol :-

$$4x + 3y + 2 = 0$$
$$3x + 2y + 1 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 9 = -1 \neq 0$$

المستقيمان متقاطعان

$$12x + 9y + 6 = 0 \qquad * 3$$
$$\mp 12x \mp 8y \mp 4 = 0 \qquad * 4$$

$$y + 2 = 0 \implies y = -2 \quad and \quad x = 1$$

∴ نقطة التقاطع هي $(h, k) = (1, -2)$

$$Let \quad x = u + 1$$

$$y = v - 2 \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du}$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{4(u+1) + 3(v-2) + 2}{3(u+1) + 2(v-2) + 1} \implies \frac{dv}{du}$$
$$= \frac{4u + 3v}{3u + 2v} \quad (homogeneous\ eq.)$$

$$Let \ \ v = zu \implies \frac{dv}{du} = z + u\frac{dz}{du}$$

$$z + u\frac{dz}{du} = \frac{4u + 3zu}{3u + 2zu}$$

$$u\frac{dz}{du} = \frac{4 + 3z}{3 + 3z} - z$$

$$u\frac{dz}{du} = \frac{4 + 3z - 3z - 2z^2}{3 + 2z}$$

$$\frac{3 + 2z}{4 - 2z^2}\, dz = \frac{du}{u}$$