University of Anbar

College of Science

Department of Applied Geology

First Year

General Physics

جامعة الانبار

كلية العلوم

قسم علوم الجيولجيا التطبيقية

المرحلة الاولى

الفيزياء العامة

Chapter Seven

PERIODIC MOTION

الفصل السابع

الحركة الدورية

(Part 1)

Dr. Israa Kamil Ahmed

د . اسراء كامل احمد

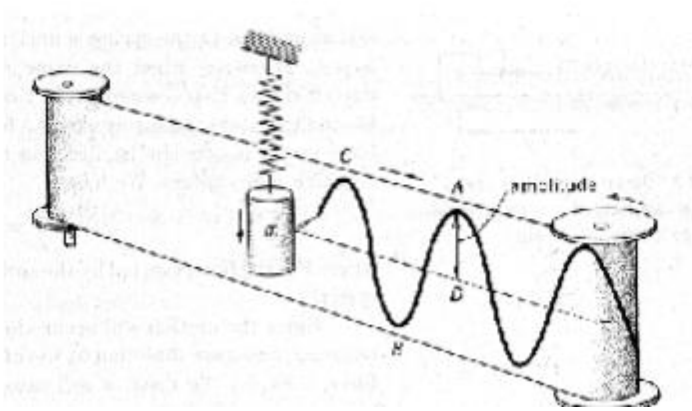
Part One in Chapter seven

هناك عدة أنواع من الحركة مثل الحركة في بعد واحد والحركة في بعدين والحركة الدائرية، وفي هذا الفصل سوف ندرس نوعاً جديداً من أنواع الحركة وهو الحركة الدورية Periodic motion أو الحركة الاهتزازيـة Vibration motion أو الحركة التذبذبية. Oscillatory motion وهو نوع من الحركة يعود فيـه الجسم إلى موضعه الأصلي خلال فترة زمنية محـددة تعـرف باسـم الـزمن الـدوري Periodic time وبمعنى آخر هي حركة جسم حول موضع اسـتقراره نتيجـة لقـوة استرجاعية force Restoring . هناك العديد من الأمثلة على الحركة الاهتزازيـة مثـل حركة بندول الساعة أو حركة جسم معلق في زنبرك كذلك دقات قلب الإنسان أو حركـة الذرات في المواد الصلبة هذا بالإضافة إلى أمواج الراديو ودوائر التيار المتردد .ولتبسيط المعالجة الرياضية لمثل هذا النوع من الحركة سنتعامل موع حالة خاصـة وهـي الحركة التوافقية البسيطة Simple Harmonic Motion والتي يهمل فيهـا الاحتكـاك والقوى الخارجة المؤثرة.

الحركة التوافقية البسيطة

Simple Harmonic Motion (SHM)

افترض وجود كتلة مثبت بها قلم كما في الشكل 1 ومعلقة بزنبرك، فإذا أعطيت إزاحـة صغيرة للزنبرك فإنه سوف يتذبذب حول موضع استقراره، وإذا تحركت ورقة رسم بياني بسرعة ثابتة مقابلة للقلم المثبت في الزنبرك فإن الشكل التالي سيظهر على الورقة.



توصف هذه الحركة بأنها حركة توافقية بسيطة حيث يكون يتم وصف الإزاحة x بالدالة الدورية على النحو التالي

$$X_{(t)} = A\cos(\omega t + \emptyset) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7\text{-}1)$$

حيث A، ω، Ø هي ثوابت ، تسمى هذه الحركة الحركة التوافقية البسيطة (SHM) ، وهو مصطلح يعني أن الحركة الدورية هي دالة جيبية للوقت.

ان A هو اتساع الحركة ويتم تعريفه على أنه الحد الأقصى للإزاحة في المحور x الموجب او في المحور x السالب.

ω هو التردد الزاوي, Ø زاوية المرحلة التي تحدد الإزاحة والسرعة الاولية , ωt+ Ø يسمى (الطور) مرحلة الحركة ويستخدم لمقارنة حركات اثنين من الحركة التوافقية البسيطة.

إحدى الخصائص المهمة للحركة التذبذبية هي ترددها ، أو عدد التذبذبات التي تكتمل كل ثانية. رمز التردد هو F ، والوحدة الدولية لها هي هرتز (اختصار Hz) ، حيث

1 hertz =1 Hz =1 oscillation per second = $\boldsymbol{1s^{-1}}$

يتعلق التردد بالزمن الدوري T للحركة ، وهو الوقت المناسب لتذبذب واحد كامل (أو دورة) ؛ حيث،

$$T = \frac{1}{F} = \frac{\omega}{2\pi} \qquad \textbf{(7-2)}$$

وحدة قياس الزمن الدوري هي ثانية (sec)

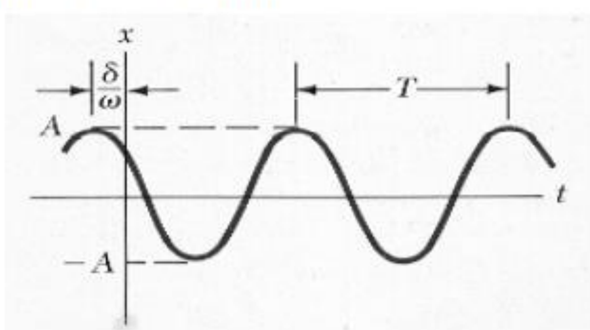
يمكننا ربط التردد الزاوي $\boldsymbol{\omega}$

بالتردد $\boldsymbol{F}$ والزمن الدوري $\boldsymbol{T}$

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \qquad \textit{(7-3)}$$

وحدة قياس التردد الزاوي هي rad / sec

The periodic time is defined as the time required for the particle to go through one cycle 2π of its motion.



The frequency of the motion

Another important physical quantity to describe the periodic motion is the frequency. The frequency f is the inverse of the periodic time.

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

The unit of frequency is cycles/sec which is known as hertz (Hz)

The angular frequency

We can relate the angular ω with the frequency and periodic time.

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

The unit of ω is rad/sec.

The velocity and acceleration of the periodic motion

By differentiating the displacement equation with respect to time we get the equation of velocity,

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \delta)$$

By differentiating the velocity equation with respect to time we get the equation of acceleration,

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} - \omega^2 A \cos(\omega t + \delta)$$

$$\because x = A\cos(\omega t + \delta)$$

$$\therefore a = -\omega^2 x$$

وهذا يعني أن عجلة جسم يتحرك حركة توافقية بسيطة تتناسب طردياً مع الإزاحة وفي الاتجاه المعاكس. وعند إثبات أن الجسم يتحرك حركة توافقية بسيطة يجب أن نثبت تلك العلاقة

The maximum velocity and the maximum acceleration

From the last equations the maximum is given by

$$v_{\max} = \omega A$$

$$a_{\max} = \omega^2 A$$

Since the maximum value for the cosine or the sine functions is between ± 1

EXAMPLE 1:

The displacement of a body is given by the expression

$$x = (8cm)\cos(2t + \pi/3)$$

where x is in cm and t in second. Calculate (a) the velocity and acceleration at $t=\pi/2$ s, (b) the maximum speed and the earliest time (t>0) at which the particle has this speed, and (c) the maximum acceleration and the earliest time (t>0) at which the particle has this acceleration.

SOLUTAION:

(a) $v = -(16cm/s)\sin(2t + \pi/3)$ at $t=\pi/2$, v = 13.9cm/s

$a = -(32cm/s^2)\cos(2t + \pi/3)$ at $t=\pi/2$, a = 16 cm/s^2

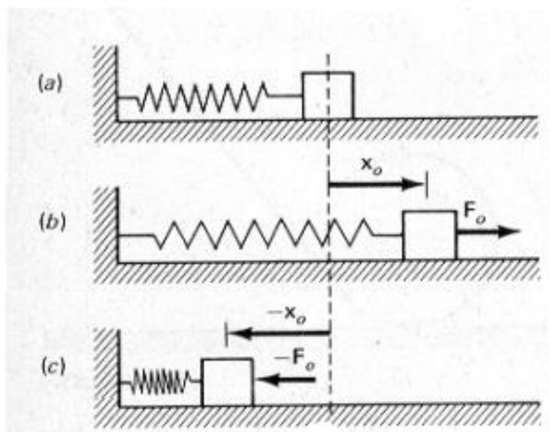
(b) $v_{\max} = \omega A$ =16cm/s, This occurs when $t = \frac{1}{2}\left[\sin^{-1}(1) - \pi/3\right]$= 0.262s

(c) $a_{\max} = \omega^2 A$ =32cm/s^2, This occurs when $t = \frac{1}{2}\left[\cos^{-1}(-1) - \pi/3\right]$= 1.05s

Mass attached to a spring

When a mass m is attached to a spring, the mass is free to move on a horizontal frictionless surface with simple harmonic motion. To prove that we need to know a bout the restoring force of the spring. Suppose the mass is stretched by small displacement x from the equilibrium position at x=0. The spring will exert a force on the mass to bring it back to x=0, this called restoring force and can be found from Hook's law,

$$F = -kx$$



where k is the spring constant and has unit (N/m), the negative sine indicates that the restoring force is always in opposite direction to the displacement x.

Applying Newton's second law of motion

$$F = -kx = ma$$

Hence,

$$a = -\frac{k}{m}x$$

نلاحظ أن عجلة جسم تتناسب طردياً مع الإزاحة وفي الاتجاه المعاكس وهذا يثبت أن حركة جسم معلق في زنبرك هي حركة توافقية بسيطة.

Compare these equations

$$a = -\frac{k}{m}x$$

$$a = -\omega^2 x$$

We conclude that,

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

Therefore,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

نلاحظ أن كلاً من الزمن الدوري والتردد يعتمدان على كتلة الجسم وعلى ثابت الزنبرك فقط. كما أن الزمن الدوري يزداد بزيادة الكتلة ويقل بزيادة ثابت الزنبرك.

Example 2:

A 5kg mass attached to a spring of force constant 8N/m vibrates with simple harmonic motion with amplitude of 10 cm. Calculate (a) the maximum value of its speed and acceleration, (b) the speed and acceleration when the mass is at *x*=6cm from the equilibrium position, and (c) the time it takes the mass to move from *x*=0 to *x*=8cm.

Solution:

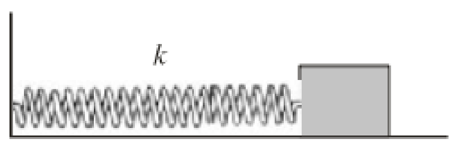
(a) $$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{8}{0.5}} = 4s^{-1}$$

Therefore the position is given by $x = (10\text{cm}) \sin(4t)$. From this we find that

$$v = (40\text{cm/s}) \cos(4t) \qquad v_{\max} = 40\text{cm/s}$$

$$a = -(160\text{cm/s}^2) \sin(4t) \qquad a_{\max} = 160\text{cm/s}^2$$

(b) $$t = \frac{1}{4}\sin^{-1}\left(\frac{x}{10}\right)$$



where x=6cm, t=0.161s and we find

$$v = (40\text{cm/s}) \cos(4\times 0.161) = 32\text{cm/s}$$

$$a = -(160\text{cm/s}^2) \sin(4\times 0.161) = -96\text{cm/s}^2$$

(c) Using $t = \frac{1}{4}\sin^{-1}\left(\frac{x}{10}\right)$

when x=0, t=0 and when x=8, t=0.232s. Therefore,

$$\Delta t = 0.232s$$

REFERENCE

1- Based Physics I by Jeffrey W. Schnick Copyright 2005-2008, Jeffrey W. Schnick, Creative Commons Attribution Share-Alike License 3.0. You can copy, modify, and rerelease this work under the same license provided you give attribution to the author. See http://creativecommons

2- FUNDAMENTALS OF PHYSICS HALLIDAY & RESNICK 9th EDITION Jearl Walker Cleveland State University