University of Anbar

College of Science

Department of Applied Geology

Fourth Year

Electromagnetics

جامعة الانبار

كلية العلوم

قسم علوم الفيزياء

المرحلة الرابعة

الكهرومغناطيسية

Electrical Field

Part Four: Application of Gauss Law

Dr. Israa Kamil Ahmed

د . اسراء كامل احمد

Part Four in this chapter: Application of Gauss Law

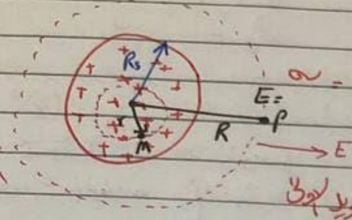
Ex :-

موصل كروي نصف قطره R_s توزع عليه شحنة Q

المطلوب : حساب شدة المجال الكهربائي عند نقطة تبعد R عن مركز الموصل ؟

∴ موصل كروي ايجابي الشحنات تتوزع بصورة منتظمة على السطح الكروي الخارجي

المجال داخل الموصل $E = 0$



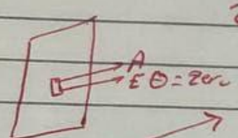
$$\sigma = \frac{Q_{in}}{A_s}$$

السطح الغاوسي

باستخدام قانون كاوس او معادلة ماكسويل الاولى

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}$$

نقوم باختيار السطح الغاوسي المناسب الذي يحوي النقطة المطلوب فيها E وتمثل السطح المغلق لذلك قمنا باختيار كرة



$$\vec{E} \cdot d\vec{A} = E\,dA\cos(0) = E\,dA(1) = E\,dA$$

$$\oint E \cdot dA = E \oint dA$$

$$E\,(4\pi R_G^2) = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}$$

$$E\,4\pi R_G^2 = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}$$

$$\because Q_{in} = \sigma A_s$$

$$E\,4\pi R_G^2 = \frac{\sigma A_s}{\epsilon_0}$$

$$E\,\cancel{4\pi} R_G^2 = \frac{\sigma\,\cancel{4\pi} R_s^2}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma R_s^2 \epsilon_0}{\epsilon R_G^2}$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\frac{R_s^2}{R_a^2}}$$

عند نقطة P $\quad E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\left(\frac{R_s}{R_G}\right)^2$

2) اذا اردنا حساب E في نقطة داخل الكرة m تبعد r عن مركز الكرة

ايضاً نختار السطح الغاوسي الذي يضم النقطة والسطح المغلق

$$\oint \vec{E}\,d\vec{A} = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}$$

∴ الكرة مادة موصلة والموصل تتوزع الشحنات على سطحه داخله لا توجد شحنات $Q = 0$

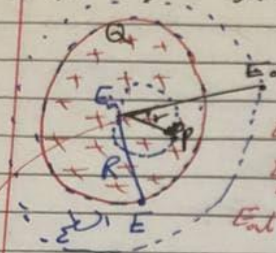
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E = 0$$

الصيغة التكاملية

الصيغة التفاضلية $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ $\quad\quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}$

Ex: احسب شدة المجال الكهربائي داخل الكرة وعلى سطح الكرة وخارج الكرة Q علماً انها , الكرة مشحونة ؟



E_{in} $r<R$

E_{s} $r=R$

E_{out} $r>R$

(التوزيع الشحنة ٣ صور)

١- حجم مثل الكرة او اي حجم

كثافة شحنة حجمية $\rho = \frac{Q}{V}$

٢- كرة موصلة او صفيحة , حيث تتوزع الشحنة على السطح

$\sigma = \frac{Q}{A}$ كثافة شحنة سطحية

٣- سلك او قضيب

كثافة شحنة طولية $\lambda = \frac{Q}{L}$

$\left[\lambda\, dl,\ \rho\, dV,\ \sigma\, dA = Q\right]$ (طول، حجم، سطح)

By using Gauss law in each Case

1) Inside

$$E_{in} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}$$

لانه لا يتغير على السطح الكاوسي

$$\vec{E} \oint d\vec{A} = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q_{in}}{4\pi r^2 \epsilon_0}$$

Q_{in} مجموع داخل السطح الكاوسي وخارجه *

$= Q(\text{حجم الكرة الكاوسية} / \text{حجم الكرة الأصلية})$

$$E = \frac{Q\,(V_G/V_S)}{4\pi r^2 \epsilon_0} = \frac{Q\left(\frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3}\right)}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$= \frac{Q r^3}{4\pi\epsilon_0 r^2 R^3}$$

$$= \frac{Q r}{4\pi\epsilon_0 R^3} \quad\quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = k$$

$$\frac{kQr}{R^3}$$

حجم الـ Q

$$E_{in\ \text{داخل}} = \frac{\rho V_r}{4\pi\epsilon_0 R^3} = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi R^3 r}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

بدلالة الكثافة الحجمية

$$\boxed{E_{in} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}}$$

Idea

② حساب شدة المجال الكهربائي على السطح قطرها R مشتقة السطح الخارجي للكرة الأصلية

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}$$

$$E\oint dA = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0} \quad E(4\pi r^2) = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}$$

على سطح الكرة $\boxed{E = \dfrac{Q_{in}}{4\pi r^2 \epsilon_0}} = \dfrac{k Q_{in}}{r^2}$

$$E = \frac{\rho V}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

حسب كرة كاوس تنطبق على السطح الأصلية $r = R$

$$E = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 R^2} \qquad \boxed{E = \frac{\rho R}{3\epsilon_0}}$$ على السطح

3) E_{out} $r > R$

نقطة خارجية بعيدة عن مركز الكرة — أكبر — خارج الكرة

$$\oint \vec{E}_{out}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}$$

$$E\oint dA = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}$$

$$E\,4\pi r^2 = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0} \Longrightarrow E_{out} = \frac{Q_{in}}{4\pi r^2\epsilon_0}$$

كلما ابتعدت النقطة شدة المجال تقل وتعتمد على r

$$E_{out} = \frac{\rho V}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \rho\frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \boxed{\frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}}\ \text{out}$$

$E_{in} \propto r$ كلما اقتربنا من المركز شدة المجال تزيد (تناسب طردي)

على السطح $E = \dfrac{\rho R}{3\epsilon_0}$ ثابت

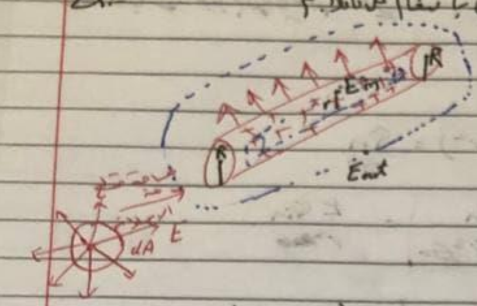
$E_{out} \propto \dfrac{1}{r}$ (تناسب عكسي) كلما ابتعدنا عن الكرة تتناقص E

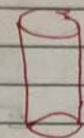
idea

Ex: أسطوانة مصمتة نصف قطرها R تتوزع فيها شحنة Q بانتظام على كامل الحجم
احسب شدة المجال الكهربائي داخل وخارج الأسطوانة

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Divergence.





قانون كاوس

$$E_{in} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0} = E(2\pi r L) = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}$$

اختر سطح كاوس
على شكل اسطواني يحتوي
المقدار ... الشحنة
داخل الأسطوانة فيها

$$E_{in} = \frac{Q_{in}}{2\pi r L \epsilon_0}$$

$$Q = \rho \, dV$$

$$\rho = \frac{Q}{V}$$

$$E_{in} = \frac{\rho V}{2\pi r L \epsilon_0} = \frac{\rho(\pi r^2 L)}{2\pi r L \epsilon_0}$$

$$\boxed{= \frac{\rho r}{2\epsilon_0}} \quad E \propto r$$

اختر سطح كاوس

$$E_{out} = \oint \vec{E} \, d\vec{A} = E(2\pi r L) = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}$$

$$E_{out} = \frac{Q_{in}}{2\pi r L \epsilon_0} = \frac{\rho V}{2\pi r L \epsilon_0} = \frac{\rho(\pi R^2 L)}{2\pi r L \epsilon_0} = \boxed{\frac{\rho R^2}{2 r \epsilon_0}}$$

$$\Uparrow E \propto \frac{1}{r}$$

$$\text{Then } \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial E_y}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\hat{k}$$ في الإحداثيات الكارتيزية

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r E_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial E}{\partial z}$$ في الإحداثيات الأسطوانية

لاحظ ان المحور ضا ثابت

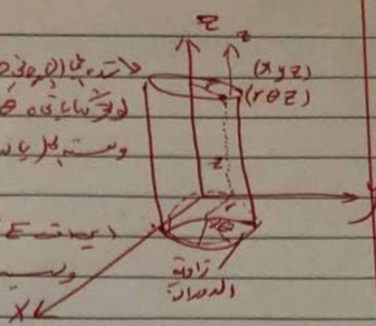
لو حسبنا قيمة θ (كل نقطة بتكون ساكنة) لا يوجد تغير في E

ونفس الشيء بالنسبة لـ z ايضا

لا يوجد $\frac{1}{r}\frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$ لا يوجد

اي ان E تتغير فقط مع r

وليس تتغير مع θ ولا z



$$\nabla\cdot E_{in} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r E_{in}) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\rho r}{2\epsilon_0}\right)$$

$$= \frac{1}{r}\,\frac{\rho}{2\epsilon_0}\,\frac{\partial}{\partial r}(r^2) = \frac{1}{\cancel{r}}\,\frac{\rho}{\cancel{2}\epsilon_0}\,(\cancel{2}\cancel{r})$$

نعوض كثافة شحنة داخل الاسطوانة $\boxed{\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$

$$\nabla\cdot E_{out} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r E_{out}) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\rho R^2}{2r\epsilon_0}\right)$$

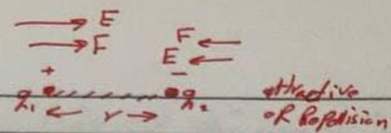
$$= \frac{1}{r}\,\frac{\rho R}{2\epsilon_0}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\cancel{r}\,\frac{1}{\cancel{r}}\right)$$

$$\frac{1}{r}\,\frac{\rho R}{2\epsilon_0}\,(0)$$

$\nabla\cdot\vec{E} = 0$ No Divergence خارج الاسطوانة

Electric Force → q

$F = k\dfrac{q_1 q_2}{r^2}$

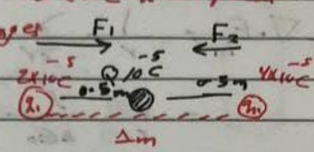


$k = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}$ / Constant

ϵ_0 : permittivity $8.85\times10^{-12}\ C^2/Nm^2$

$9\times10^{9}\ Nm^2/C^2$

// Ex: Two charges $q_1 = 2\times10^{-5}C$ and $q_2 = 4\times10^{-5}C$ are held at a distance $d = 1m$ apart. Calculate the force ~~exerted~~ by the two charge on a charge $Q\ 10^{-5}C$ if its placed a half between them, is there a point between two charges where the force vanished?



$F_1 = k\dfrac{q_1 Q}{r^2} = 9\times10^{9}\dfrac{2\times10^{-5}\times10^{-5}}{(0.5)^2} = 7.2\,N$

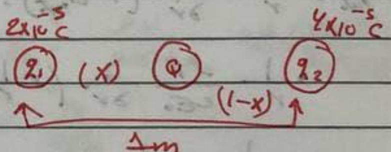
$F_2 = k\dfrac{q_2 Q}{r^2} = 9\times10^{9}\dfrac{4\times10^{-5}\times10^{-5}}{(0.5)^2} = 14.4\,N$

Resultant force

$\therefore R = F_1 - F_2$ (Vector)

$= 7.2 - 14.4 = -7.2\,N$

2) $F_1 = F_2$



$k\dfrac{q_1 Q}{r_1^2} = k\dfrac{q_2 Q}{r_2^2}$

$\cancel{9\times10^{9}}\dfrac{2\times10^{-5}\times10^{-5}}{x^2} = \cancel{9\times10^{9}}\dfrac{4\times10^{-5}\times10^{-5}}{(1-x)^2}$

$2x^2 = (1-x)^2$

$\sqrt{2}\sqrt{x^2} = \sqrt{(1-x)^2}$

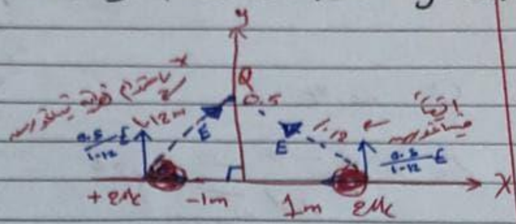
$\sqrt{2}x = 1 - x \Rightarrow \sqrt{2}x + x = 1$

$x(\sqrt{2}+1) = 1$

$\therefore x = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = 0.414\,m$

Ex:

Two point charges 2μc are located on the x-axis, one is at x = 1m and the other is at x = -1m. a) Determine the Electric Field on the y-axis at y = 0.5m
b) Calculate the electric force on a -3 μc charge placed on the y-axis at y = 0.5m



1) $E = k\frac{q}{r^2}$ ← point charge

$9\times10^9 \frac{2\times10^{-6}}{(1.12)^2}$

$= 14.35\times10^3$ N/c

Resolution (تحليل)

$\xrightarrow{\frac{1}{1.12}E}$ ⊕ $\quad$ ⊖ $\xleftarrow{\frac{1}{1.12}E}$

$E_x = 0$
→ Cause [illegible]

$E_y = \frac{0.5}{1.12}E + \frac{0.5}{1.12}E = \frac{1}{1.12}E$

$\therefore E = \frac{1}{1.12}\times 14.35\times10^3 = 12.81\times10^{3}$ N/c

2) $Q = -3μc$
$E = \frac{F}{Q} \Rightarrow F = QE$
$F = -3\times10^{-6}\times12.81\times10^3$
$= \dots\dots$ N

[Some important Notes :-]

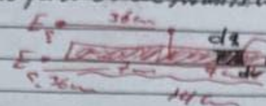
Charge Density → line, Area, Volume

line: linear charge Density $\lambda = \frac{Q}{L}$ c/m

Area: surface charge density $\sigma = \frac{Q}{A}$ c/m^2

Volume: Volume charge density $\rho = \frac{Q}{V}$ $\frac{c}{m^3}$

Ex: A rod 14 cm long is uniformly charged and has a Total charge of -22 Mc, Determine the magnitude and direction of the electric Field along the axis of the rod at point 36 cm from its Center?



$Q = -22\ Mc$

$E = k\frac{q}{r^2} \rightarrow$ [illegible] point charge

[illegible] point charge

So;

$dE = k\frac{dq}{r^2}$

$\lambda = \frac{Q}{L} = \frac{dq}{dr}$

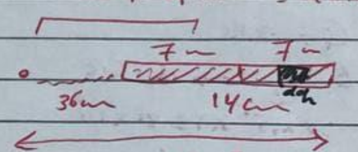
$dq = \frac{Q}{L} \cdot dr$

$\therefore dE = k\frac{Q}{L}\frac{dr}{r^2}$

$\int dE = \int k\frac{Q}{L}\frac{dr}{r^2}$

$E = k\frac{Q}{L}\int\frac{dr}{r^2}$

$36 - 7 = 29$ min $= 29 \times 10^{-2}$ m



$E = k\frac{Q}{L}\left[\frac{-1}{r}\right]_{29}^{43}$

$36 + 7 = 43$ cm $= 43 \times 10^{-2}$ max

$= 9\times10^{9}\left[\frac{-22\times10^{-6}}{14\times10^{-2}}\ \frac{-1}{43\times10^{-2}} - \frac{-1}{29\times10^{-2}}\right]$

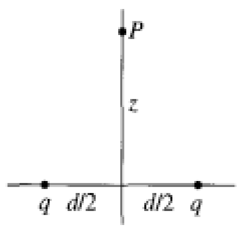
$E =$ ——— N/C ——→ to right

H.W 1:

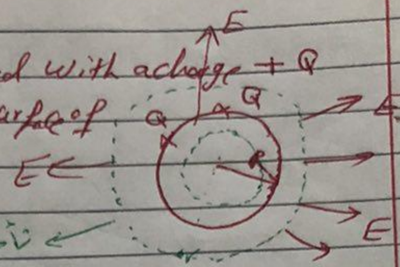
(a) Twelve equal charges, q, are situated at the comers of a regular 12-sided polygon (for instance, one on each numeral of a clock face). What is the net force on a test charge Q at the center?

H.W 2:

(a) Find the electric field (magnitude and direction) a distance *z* above the midpoint between two equal charges, *q*, a distance *d* apart (Fig. 1). Check that your result is consistent with what you'd expect when z » d?



Conducting sphere with Radius R charged with a charge $+Q$
Find Electric Field inside, outside, at the surface of The sphere?



نأخذ سطح كاوسي مناسب حتى نحلل واهم شي يكون كاوسي

$$\oint E \cdot dA = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}$$

مساحة سطح الكرة

$$E\,4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E = k\frac{Q}{r^2}$$

Electric field outside The sphere Conductor oR Non-Conductor The same

$$\boxed{E = k\frac{Q}{r^2} \qquad k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}}$$

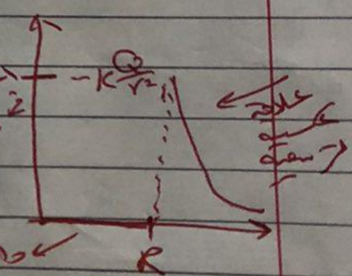
E inside $r < R$

$$\oint E \cdot dA = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}$$

$$E\,4\pi r^2 = \frac{0}{\epsilon_0}$$

$$\boxed{E = 0}$$

المجال الكهربائي داخل الموصل
= Zero



العلاقة عكسية تربيعية

داخل الكرة

$$\boxed{\text{So: } E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}}$$

ملاحظة / $\sigma = \frac{Q}{\text{Area}}$ $\frac{\text{الشحنة}}{\text{المساحة}}$

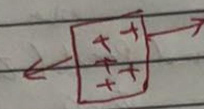
Summary :-

$\phi = \int E\,dA = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$ الهدف الاكبر من القانون
هو انّا نجد ϕ والمقابل E

1) point charge $E = K\frac{q}{r^2}$ من قانون كولوم

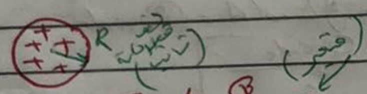
2) line charge $E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$

3) sheet have E in Two direction



$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

4) يوجد لدينا كرة طاقة مصمتة وانتشرت
V الكرة من طاقة عازلة ووصفها بانها مصمتة
فكل من حالتنا ليومن عملية جزء ووضعنا فوقها حسم وكرتنا وعلمنا كرة والجسم موزع بصورة متساوية



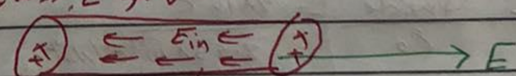
داخل الكرة 1) $r < R$ $E = K\frac{Q}{R^3}r$ $E \propto r$ inside

خارج الكرة $r > R$ $E = K\frac{Q}{r^2}$ $E \propto \frac{1}{r}$ outside

عند center $E = 0$
at surface $K\frac{Q}{r^2} = E$

Conducting

داخل الموصل الكترونات مرة تكون E بداية عدم



بعد شوي الاثنين E تساوي E = صفر (المحصلة)
وتتوقف حركة الالكترونات
والعملية سريعة جداً

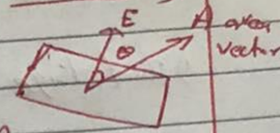
ملاحظة مهمة

المجال الكهربائي داخل الموصل = Zero | مهما صار وحتى لو اشحنت بالالكترونات تتوزع بحسب الشكل وعلى السطح وداخله = صفر

E inside Conductor = Zero

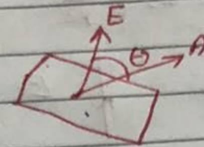
summary: 1. Generally $\phi_E = \int E \cdot dA$

2. if E is uniform and inclined with the area vector by an angle θ: $\phi_E = EA\cos\theta$



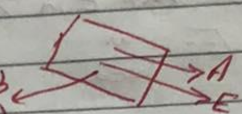
3. if E is uniform and Normal to area

$\phi = EA$



4. if E is uniform and موازي Parallel to the area

$\phi_E = 0$



Gauss law: state that the total electric Flux through any closed surface (Gaussian surface) times ε_0 is equal to the total electric charge inside this surface

$\varepsilon_0 \phi_E = Q_{inside}$ $\quad \varepsilon_0 \oint E \cdot dA = Q_{inside}$

$$\boxed{\text{مغلق} \oint E \cdot dA = \frac{Q_{inside}}{\varepsilon_0}}$$

* سطح مغلق / كرة، مكعب، متوازي مستطيلات، اسطوانة

* مثلا النصف الكروي φ ما بقدر احسبها لانه مش سطح مغلق لنقدر نطبق فيه، [illegible]

Example: A 4.0 Mc charge is at the center of a sphere of Radius 7 cm Determine the totall flux Through this sphere?

$$\phi_E = \frac{Q_{inside}}{\varepsilon_0} = \frac{4 \times 10^{-6}\,C}{8.85 \times 10^{-12}\,C^2/Nm^2} = 4.52 \times 10^{5}\,Nm^2/C$$

Example: A 40 Mc charge and -20 Mc charge are inside a 7 m sphere Determine the total electric Flux through this sphere?

$$\phi_E = \frac{Q_{inside}}{\varepsilon_0} = \frac{40 + (-20) \times 10^{-6}\,C}{8.85\,C^2/Nm^2} = 2.26 \times 10^{6}\,N \cdot m^2/C$$

Example: A 40 Mc charge is inside a sphere of Radius 7 cm, A seconed -20 Mc charge is outside but near the 7 cm sphere, Determin the total elec Flux through this sphere? $\phi_E = \frac{Q_{inside}}{\varepsilon_0} = \frac{40 \times 10^{-6}\,C}{8.85 \times 10^{-12}\,C^2/Nm^2} = 4.52 \times 10^{5}$

Calculate $\vec{\nabla}\times\vec{E}$?

We Know that $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho\, dt}{r^2}\,\hat{r}$

taking curl of E

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\left(\vec{\nabla}\times\frac{1}{r^2}\right)dt\,\hat{r}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\left(\nabla\times\frac{1}{r^2}\right)dt\,\hat{r} \longrightarrow (A)$$

Since we know that $\vec{\nabla}\times\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\left(\nabla\times\frac{1}{r^2}\right)dt\,\hat{r}$

So $\vec{\nabla}\times\frac{1}{r^2} = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\cdot\frac{1}{r^2}\right) + 0 + 0 -$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int 0\, dl \implies \vec{\nabla}\times\vec{E} = \text{Constant }(0) = 0$$

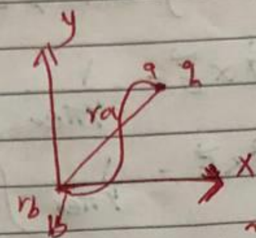
$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0}$$

The curl of E:-

we know that the electric field for a point charge is

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

$$\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{c}$$



spherical coordinates $d\vec{l} = dr\hat{r} + r\,d\theta\,\hat{\theta} + r\sin\theta\, d\phi\,\hat{\phi}$

$$\boxed{d\vec{c} = d\vec{l} = \hat{r}\,dr + r\theta\,d\theta + r\sin\theta\, d\phi\,\phi}$$

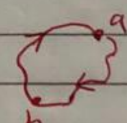
$$\hat{r}\cdot\hat{\theta} = 0$$
$$\hat{r}\cdot\hat{\phi} = 0$$
$$\hat{r}\cdot\hat{r} = 1$$

$$\vec{E}\cdot d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{q}{r^2}\,dr$$

$$\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_a^b \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\,dr$$

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_a^b \frac{1}{r^2}\,dr \Rightarrow \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{-1}{r}\right]_a^b \Rightarrow \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{-1}{r_b} - \left(\frac{-1}{r_a}\right)\right]$$

$$\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right]$$



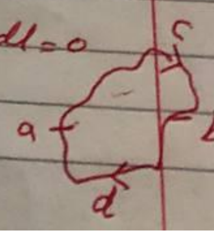
$\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} = 0$ in closed loop

$$\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} = \oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$$

Stokes Theorem: $\int_s (\vec{\nabla}\times\vec{E})\cdot d\vec{a} = \oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$

$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0}$ curl of Electric field is equal to zero

For any closed surface like $\int_{acbda} \vec{E}\cdot dl = 0 = \int_{acb} E\cdot dl + \int_{bda} E\cdot dl = 0$



Reference:

1) INTRODUCTION to ELECTRODYNAMICS, Third Edition, David j.Griffths