Measures of Central tendency

ان معظم القيم لمختلف الظواهر الطبيعية تتمركز عادة في الوسط او قريبة منه ومقايس التمركز او التوسط لأي مجموعة من البيانات التابعة لظاهرة ما ، هي تلك المقاييس التي تبحث في تقدير قيمة تتمركز حولها اغلبية هذه البيانات وان القيمة المتوسطة او المتمركزة هي رقم واحد يعبر عن او يمثل جميع بيانات تلك المجموعة .

وعند اخذ عدة قياسات لمتغير معين كالوزن والطول وضغط الدم وعدد الكريات الحمر ، نلاحظ ان هذه القياسات (القيم) ككل يمكن ان تمثل بقيمة معينة ويطلق على هذه الظاهرة مصطلح النزعة المركزية ومن اهم مقاييس النزعة المركزية مايلي :

1. الوسيط الحسابي (المتوسط) The Arithmetic Mean
2. الوسط الهندسي The Geometric Mean
3. الوسط التوافقي The Harmonic Mean
4. الوسط التربيعي The Quadratic Mean
5. الوسيط The Median
6. المنوال The Mode

وسوف يتم شرح كيفية حساب بعض هذه المقاييس اعلاه في حالتين:

- حالة البيانات غير المبوبة.
- حالة البيانات المبوبة.

اولاً: الوسيط الحسابي The Arithmetic Mean

وهو من أكثر مقاييس النزعة المركزية شيوعاً واستعمالاً ويطلق علية احياناً بالمعدل الحسابي average Arithmetic أو الوسط الحسابي. ولابد من تشخيص الوسط الحسابي لمجتمع او لعينة وعلى هذا الاساس يرمز لهذا المقياس برمزين مختلفين هما:

A) الرمز (M) وهو يمثل المتوسط الحسابي للمجتمع. وتجدر الاشارة الى ان (M) هي قيمة ثابتة لا تتغير ولهذا فإنها تعتبر من معالم او ثوابت Paramelres المجتمع.

B) الرمز ($\bar{Y}$) المتوسط الحسابي للعينة . وهي تتغير من عينة الى اخرى اعتماداً على العناصر التي تشملها كل عينة. وهي تعتبر من الاحصاءات او التقديرات. اما قيمة الوسط الحسابي فانها تحدد وفق المعدلة التالية.

$$\text{المتوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عدد القيم}}$$

طرق حسابة

(أ) من بيانات غير مبوبة

مثال: اذا كانت البيانات التالية تمثل اطوال ثمان نخلات.

11 ، 16 ، 16 ، 15 ، 11 ، 16 ، 11 ، 16 م

احسب الوسط الحسابي لها في حالة كونها مجتمع قائم بذاته وفي حالة كونها عينة.

الحالة الاولى / المتوسط الحسابي الحقيقي للمجتمع

حيث ان N = تمثل حجم المجتمع (اي عدد جميع مفرداته)

$$My=\frac{\sum_{i-1}^{N} yi}{N}=\frac{11+16+16+15+11+16+11+16}{8}=\frac{112}{8}=14\ m$$

الحالة الثانية/ المتوسط الحسابي اذا اعتبرنا عدد النخيل عينة من مجتمع النخيل

$$\overline{y}=\frac{\sum_{i-1}^{N} yi}{N}=\frac{11+16+16+15+11+16+11+16}{8}=\frac{112}{8}=14\ m$$

(ب) من بيانات مبوبة

يتم حساب الوسط الحسابي من بيانات مبوبة كمايلي :

1 – تعين مراكز الفئات yi

2 – ضرب مركز كل فئة بمقدار تكرارها (fi.yi)

3 – بقسمة (حاصل ضرب مركز كل فئة في تكرارها) على مجموع التكرارات.

مثال : احسب الوسط الحسابي لأطوال النباتات من جدول التوزيع التكراري التالي

الفئات	التكرار	مركز الفئة yi	التكرار × مركز الفئة yi x fi
40 – 31	1	35.5	35.5
50 – 41	3	15.5	136.5
60 – 51	5	55.5	277.5
70 – 61	16	65.5	1048
80 – 71	25	75.5	1887.5
90 – 81	19	85.5	1624.5
100 - 91	11	95.5	1050.5
المجموع	$\sum fi = 80$		$\sum fi\,.\,yi = 6060$

$$\overline{y}=\frac{\sum fi.yi}{\sum fi}=\frac{6060}{80}=75.75$$

مثال: جد الوسط الحسابي للبيانات التالية

23 ، 1 ، 14 ، 10 ، 4 ، 5 ، 2 ، 1 ، 12 ، 4

مثال : البيانات التالية تمثل كمية المطر المتساقط بالملمتر على محافظة نينوى . جد متوسط سقوط الامطار

الوسط الحسابي الموزون (المرجح)

اذا كان المجتمع مقسم الى طبقات مختلفة واخذت عينة من كل طبقة فأن حساب المتوسط الحسابي يجب ان يأخذ بنظر الاعتبار الاحجام النسبية للطبقات ويسمى في هذه الحالة المتوسط الحسابي الموزون او الراجح .

وهو الوسط الحسابي الذي يأخذ بنظر الاعتبار عند حسابة الاهمية النسبية لكل قيمة من قيم المشاهدات . اذا كان لكل قيمة من المشاهدات (yi) وزن خاص يتناسب مع اهميته (wi) فإن الوسط الحسابي الموزون لهذه القيم هو

$$\bar{y} = \frac{\sum \mathbf{wi}.\boldsymbol{yi}}{\sum \mathbf{wi}}$$

مثال : القيم التالية تمثل نتائج امتحان الطلبة في درس الكيمياء علماً ان لكل امتحان وزناُ او اهميته او نسبة معينة

الامتحان	الدرجة yi	اهميتها او نسبتها او وزنها wi	Wi . yi
الاول	70	%10	700
الثاني	60	%30	1800
الثالث	75	%10	750
الرابع	55	%50	2750
		$\sum \mathbf{wi} = \mathbf{100}$	$\sum \mathbf{wi}.\boldsymbol{yi} = 6000$

الوسط الحسابي او معدل الطالب سيكون

$$\bar{y} = \frac{\sum \mathbf{wi}.\boldsymbol{yi}}{\sum \mathbf{wi}} = \frac{\mathbf{6000}}{\mathbf{100}} = \mathbf{60}$$

تمرين: (أ) اوجد الوسط الحسابي للبيانات التالية

5 ، 3 ، 10 ، 5 ، 7 ، 6 ، 8 ، 9

(ت) اوجد الوسط الحسابي للبيانات الموجحة في جدول التكراري التالي:

الفئات	التكرار fi	yi	$fi \cdot yi$
53 – 50	20		
57 – 54	10		
61 – 58	45		
65 – 62	11		
69 – 66	14		
المجموع	100		

تمرين: احسب الوسط الحسابي لدرجات 50 طالب من جدول التوزيع التكراري

الدرجات	التكرار fi	yi	$fi \cdot yi$
49.5 – 59.5	3		
59.5 – 69.5	5		
69.5 – 79.5	18		
79.5 – 89.5	16		
89.5 – 99.5	8		
المجموع	50		

المنوال او القمة The Mode

المنوال هو القيمة (القيم) الاكثر شيوعاً او حيوياً بين مجموعة القيم قيد الدرس. ويلاحظ بأن هذا المقياس يعطي للقارئ فكرة حول تراكم القيم حول قيمة (قيم) كأن تكون الطول او الوزن او عدد المواليد او عدد التفرعات الاكثر شيوعاً.

اولاً: في حالة بيانات غير مبوبة

مثال: اوجد المنوال لكل من البيانات التالية

(أ) 6 ، 8 ، 2 ، 5 ، 9 ، 5 ، 6 ، 2 ، 5 ، 3

(ب) 48 ، 49 ، 50 ، 46 ، 51

الحل: (أ) المفردة او القيمة 5 هي أكثر القيم او المشاهدات تكراراً فهي المنوال

$$0= 5\overline{M}$$

(ب) لايوجد منوال لهذه المفردات

ثانياً: في حالة بيانات مبوبة

اذا كانت القيم $y_1 , y_2 , \ldots\ldots\ldots y_n$ تمثل مراطز الفئات في جدول التوزيع التكراري مع تكرارتها $f_1 , f_2 , \ldots\ldots f_k$ على التوالي فان المنوال

$$0= L1 + \left(\frac{d1}{d1+d2}\right) W\overline{M}$$

حيث ان

فئة المنوال : تلك الفئة التي تمتلك اكبر التكرارات

L1 : الحد الادنى الحقيقي لفئة المنوال .

d1 : الفرق بين تكرار فئة المنوال والفئة السابقة لها .

d2 : الفرق بين تكرار فئة المنوال والفئة اللاحقة لها .

W : طول الفئة .

مثال: اوجد المنوال للجدول التوزيع التكراري التالي:

الفئات	التكرار fi
62 – 60	5
65 – 63	18
68 – 66	42
71 – 69	27
74 – 72	8
المجموع	100

الحل:

فئة المنوال: الفئة (66 – 68) لها أكبر التكرارات (42) فهي فئة المنوال.

الحد الحقيقي لفئة المنوال = $\dfrac{\text{الحد الادنى لتلك الفئة+ الحد الاعلى للفئة السابقة}}{\mathbf{2}}$

$65.5 = \frac{65+66}{2} =$

$24 = 18 – 42 = d1$

$15 = 27 – 42 = d2$

$3 = 60 – 63 = W$

$$0= 65.5 + \left(\frac{\mathbf{24}}{\mathbf{24+15}}\right) (3) = 67.55\overline{M}$$

ولايخفى ان القيمة المحسوبة للمنوال لابد لها ان تقع داخل حدود الفئة المنوالية وتجدر الاشارة الى ضرورة حساب قيم المنوال المختلفة وفق المعادلة السابقة في حالة وجود اكثر من فئة منوالية واحدة لنفس مجموعة البيانات .

$$0= L1 + (\frac{d1}{d1+d2})\ W\overline{M}$$

الوسيط The Median ورمزة $e\overline{M}$

الوسيط: هو القيمة التي تمثل المرتبة الوسطى عندما ترتب قيم الدرس تصاعدياً او تنازلياً. وهذا يعني ان نصف القيم تقل عن قيمة الوسيط والنصف الاخر يزيد عليها.

(أ) بيانات غير مبوبة

1 - اذا كان (n) عدد فردي

فان الوسيط هو القيمة التي ترتيبها $\frac{n+1}{2}$

مثال : اوجد الوسيط لدرجات طالب في خمسة امتحانات بدرس الاحصاء اذا كانت الدجات هي

80 ، 82 ، 76 ، 87 ، 84

الحل : نرتب الدرجات تصاعدياً

76 ، 80 ، 82 ، 84 ، 87

وبما ان عدد الارقام فردي (n = 5)

اذا قيمة الوسيط هي القيمة التي ترتيبها (y3) $\frac{n+1}{2} = \frac{5+1}{2} = 3$

$e\overline{M} = y3 = 82$

2 - اذا كان n عدد زوجي فان الوسيط هو الوسط الحسابي للقيمتين اللتين ترتيبهما $\frac{n}{2}$, $\frac{n}{2}+1$

$$e=\frac{y_{\frac{n}{2}}+(y_{\frac{n}{2}}+1)}{2}\overline{M}$$

مثال : اوجد الوسيط للقيم التالية

$yi = 5 ، 4 ، 8 ، 7 ، 3 ، 12 ، 9 ، 2$

الحل: نرتب القيم تصاعدياً

$yi = 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 7 ، 8 ، 9 ، 12$

وبما ان عدد القيم هو عدد زوجي ($n = 8$)

∴ الوسيط = هو الوسط الحسابي للقيمتين اللتين ترتيبهما $\frac{n}{2}$, $\frac{n}{2}+1$

المرتبة الوسطى الاولى $\frac{n}{2} = \frac{8}{2} = 4$

المرتبة الوسطى الثانية $\frac{n}{2}+1 = \frac{8}{2}+1 = 4+1 = 5$

$$\therefore \overline{Me} = \frac{y4+y5}{2} = \frac{5+7}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

(ب) بيانات مبوبة

اذا كان لدينا $y1 , y2 , \ldots\ldots yn$ تمثل مراكز فئات في جدول التوزيع التكراري مع تكرارتها $f1 , f2 , \ldots. fn$ على التوالي . فقيمة الوسيط لهذه البيانات (بالاستعانة بجدول التوزيع التكراري المجتمع الصاعد) هو

$$\mathbf{e = L1 + \left(\frac{\left(\frac{\sum fi}{2}\right) - Fi}{fi}\right) W\overline{M}}$$ الوسيط

حيث ان

$L1$ = الحد الادنى الحقيقي لفئة الوسيط .

$\sum fi$ = مجموع التكرارت .

Fi = تكرار المجتمع الصاعد عند بداية فئة الوسيط .

fi = تكرار فئة الوسيط ويحسب كما يلي .

fi = التكرار المجتمع عند نهاية فئة الوسيط – التكرار المجتمع عند بداية فئة الوسيط

W = طول فئة الوسيط .

خطوات ايجاد الوسيط

1 – عمل جدول التوزيع التكراري التجمعي التصاعدي

2 – ايجاد ترتيب الوسيط $\frac{\sum fi.}{2}$

3 – نحدد فئة الوسيط وهي الفئة التي نضع قيمة الوسيط بين حدين وذلك عن طريق ايجاد قيمتين متتاليتين في التكرار التجميعي الصاعد يقع بينهما ترتيب الوسيط .

4 – نحدد تكرار فئة الوسيط fi ويحسب كما يلي

fi = التكرار المجتمع عند نهاية فئة الوسيط – التكرار المجتمع عند بداية فئة الوسيط

5 – نحدد الحد الادنى والحد الاعلى الحقيقي لفئة الوسيط كما يلي :

$$\textbf{الحد الادنى لفئة الوسيط} = \frac{\text{الحد الادنى لتلك الفئة} + \text{الحد الاعلى للفئة السابقة}}{\mathbf{2}}$$

$$\textbf{الحد الاعلى لفئة الوسيط} = \frac{\text{الحد الاعلى لتلك الفئة} + \text{الحد الادنى للفئة التي تليها}}{\mathbf{2}}$$

6 – نحدد طول فئة الوسيط = الحد الاعلى الحقيقي – الحد الادنى الحقيقي .

7 – نطبق القانون بعد استخراج جميع هذه القيم .

$$e= L1 + \left(\frac{\left(\frac{\sum fi.}{2}\right)-Fi}{fi}\right) W\overline{M}$$

مثال: اوجد الوسيط لجدول التوزيع التكراري التالي :

ت	الفئات	التكرار fi		Fi	
1	62 – 60	5	اقل من 60	0	
2	65 – 63	18	اقل من 63	5	
3	68 – 66	42	اقل من 66	23	فئة الوسيط
4	71 – 69	27	اقل من 69	65	
5	74 – 72	8	اقل من 72	92	
			اقل من 74	100	

1 – عمل جدول توزيع تكراري

2 – ايجاد ترتيب الوسيط $\sum fi = \frac{\sum fi.}{2} = \frac{100}{2} = 50$

وفي جدول التوزيع التكراري التجميعي التصاعدي نرى بان (50) واقعة بين الرقمين 23 و 65.

3 - ∴ فئة الوسيط هي 23 و 65 (**23 التكرار المجتمع عند بداية فئة الوسيط ، 65 التكرار المجتمع عند نهاية فئة الوسيط) .**

4 - fi = التكرار المجتمع عند نهاية فئة الوسيط – التكرار المجتمع عند بداية فئة الوسيط

هذا المقدار يحدد الفئة التي تستخرج منها الحدود الحقيقية $fi = 65 - 23 = 42$

5 – نحدد الحد الاعلى الحقيقي والحد الادنى الحقيقي لفئة الوسيط

الحد الادنى لفئة الوسيط = $\frac{\text{الحد الادنى لتلك الفئة + الحد الاعلى للفئة السابقة}}{2}$

$= \frac{65+66}{2} = 65.5$

الحد الاعلى لفئة الوسيط = $\frac{\text{الحد الاعلى لتلك الفئة + الحد الادنى للفئة التي تليها}}{2}$

$= \frac{69+68}{2} = 68.5$

6 – نحدد طول فئة الوسيط = الحد الاعلى الحقيقي – الحد الادنى الحقيقي .

$W = 68.5 - 65.5 = 3$

7 – نطبق القانون

$L1 = 65.5$ ، $Fi = 23$ ، $fi = 42$ ، $W = 3$

$$\therefore e = L1 + \left(\frac{\left(\frac{\sum fi.}{2}\right) - Fi}{fi}\right) W\overline{M}$$

$$e = 65.5 + \left(\frac{\left(\frac{100.}{2}\right) - 23}{42}\right) x\ 3\overline{M}$$

$$e = 65.5 + \left(\frac{50 - 23}{42}\right) x\ 3\overline{M}$$

$$e = 65.5 + 1.93 = 67.43\overline{M}$$

المصادر References:

1- الراوي، خاشع محمود .1979. المدخل الى علم الإحصاء. مديرية دار الكتب للطباعة والنشر. جامعة الموصل.

2- منصور، عوض وعزام صبري وعلي قوقزة. 1999. علم الإحصاء الوصفي المبرمج. دار الصفاء للنشر والتوزيع. عمان. الأردن.

3- بول. ج. هويل. 1985. المبادئ الأولية في الإحصاء. ترجمة د. بدرية شوقي عبد الوهاب. دار جون وايلي وابناءه للنشر. نيويورك.

4- كاظم، فوزي عبد الحميد وناظم يونس عبد ونعيم مطلك عبد الله. 2016. اساسيات علم الإحصاء. دار الكتب والوثائق. بغداد. العراق.

5- Scarisbrick, D. H. and A .G. Clewer. 2013. Practical statistical and Experimental Design for plant crop scince. Wiley