Elementary probability theory

ان نظرية الاحتمال تلعب دورا هاما في نظريات وتطبيقات علم الاحصـــــاء وتعني بدراســـة التجارب العشوائية. وعليه فان معظم امثلة الاحتمال مبينة على التجارب التالية:

1-تجارب قطعه النقود: ولقطعة النقود وجهان (صورة وكتابة)

2-تجارب في زار الطاولة: زهر النرد ويتألف من (6) وجوه كل وجه يأخذ رقما من (1-6)

3-تجارب صندوق الكرات ويحتوي على كرات مختلفة

ان اســتعمال هذه الامثلة في نظرية الاحتمال لا يعني بان نظرية الاحتمالات لا تطبق الا في هذه المجالات والحقيقة ان نظرية الاحتمالات لها تطبيقات في شتى مجالات الحياة.

التجربة العشـــوائية: -هي التجربة التي لا يمكن معرفة نتيجتها لخضـــوعها لقوانين الاحتمال. مثل رمي قطعه النقود فهي تجربة عشوائية لان النتائج الممكنة تخضع لقوانين الاحتمال.

فضاء العينة Sample space

هي مجموعه من النقاط تمثل جميع النتائج الممكنة لتجربة ما. حيث ان كل نتيجة تمثل بنقطة او عنصر في فضاء العينة.

مثال: - عند رمي قطعة النقود مرة واحدة فان فضاء العينة يتكون من نتيجتين ممكنتين **H , T**

ويمكن كتابته كما يلي: $A = \{H , T\}$

مثال: - عند رمي زار الطاولة مرة واحدة فان فضاء العينة يتكون من (6) نتائج ممكنة هي

$$S = \{1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6\}$$

الحادث او الحدث Event

هو نقطة او عدة نقاط في فضـاء العينة ويرمز له (Ei) او (هو حصـول او وقوع الشـيء المبحوث عنه او قيد الدرس)... فعند القاء قطعة النقود والمطلوب ظهور الصورة فان ظهور الصورة هو حدث .

درجة وقوع الحدث ← احتمال حصول الحدث ← الاحتمال ← (E) احتمال حصول الحدث

$$0 \leqslant P(E) \leqslant 1.0$$

1.0

احتمال حصول الحدث تتراوح بين الصفر و 1.0

اي ان الصفر عدم وقوعه و1.0 هو وقوع الحدث 100%

المعادلة العامة لحساب احتمال حصول الحدث هي:

$$\text{احتمال حصول الحدث} = \frac{\text{عدد المرات التي يمكن ان يحصل بها الحدث قيد الدرس}}{\text{العدد الكلي الممكن من الحالات}}$$

مثال :- العدد الكلي لطلاب الدراسات العليا (150) طالب بينهم (30) طالبة .

المطلوب : لو وضعت اسماء جميع الطلاب في كيس وسحبنا ورقة ما هو احتمال ظهور الاسم لطالبة؟

$$\text{الاحتمال}(E) = \frac{30}{150} = \frac{1}{5} = 0.2 = \%20$$

مثال :

عدد النباتات الكلي = 200 ← عدد النباتات السليمة = 120

عدد النباتات المصابة =80

لو تم اختيار نبات واحد بشكل عشوائي من بين النباتات ال 200 ما هو احتمال ان يكون النبات مصاب.

$$\text{احتمال مصاب} = \frac{80}{200} = 0.4 = \%40$$

لو كتبنا المعلومات السابقة بصيغة ثانية

حالة النبات	العدد Fi	التكرار النسبي Ki
مصاب	80	0.4
سليم	120	0.6

ملاحظة: التكرار النسبي في حالة البيان المصاب

+ التكرار النسبي في حالة البيان السليم =1

$$P(E) = P$$

$$P(\not{E}) = (1.0 - P) = \vartheta$$

$$(P + \vartheta) = 1.0$$

اعتياديا نرمز لاحتمال حصول الحدث ب

واحتمال عدم حصول الحدث ب ϑ

هذا الشيء ينطبق على الحالات التي فيها حالتين فقط مثل (ذكر، انثى) اي التي تشمل حالتين فقط تسمى محاولة برنولي.

محاولات برنولي Bernoulli trials

كل حالة تؤدي الى نتيجتين فقط تخضع او تقع ضمن محاولات برنولي .

مثل رمية قطعة نقود ← **صورة H** / **كتابة T**

ولادة ← ذكر / **انثى**

نتيجة الاحتمال ← نجاح / فشل

حالة الحيوان ← مصاب / سليم

محاولات برنولي تتميز بما يلي: -

1-كل حالة لها نتيجتان فقط متنافيتان.

2- نتائج المحاولات المختلفة مستقلة عن بعضها البعض.

3- احتمال حصول الحدث يبقى ثابتا من محاولة الى محاولة.

4- احتمال حصول الحدث $P(E) = P$

واحتمال عدم حصول الحدث $P(\bar{E})=\vartheta$

حيث ان $P+\vartheta=10$

<u>بعض خواص الاحتمال :</u>

1-ان مجموع درجة احتمال ظهور الحادث **P(E)** ودرجة احتمال عدم ظهوره **$1=P(\bar{E})$** أي

$P(E)+P(\bar{E})=1$

2- ان درجة (قيمة) احتمال اي حادث لا يقل عن صفر ولا يزيد عن الواحد

توزيع ذو الحدين Binomial Distribution

خواصه: -

1-التوزيع الذي يعالج الحالات التي تشمل أكثر من محاولة واحدة من محاولات برنولي.

2- هذا التوزيع هو توزيع متعلق بالأعداد.

ملاحظة: هنالك شيء يسمى مضروب العدد حيث إذا كانت (n) فالمضروب هو n!

$n!=(n)(n-1)(n-2)....(1)$

$5!=(5)(4)(3)(2)(1)$

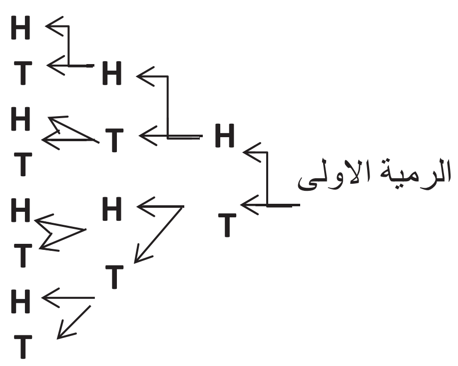
ومضروب العدد لا يسمح له بالوصول الى الصفر او الاعداد السالبة.

لذا لا يوجد هناك مضروب للأعداد السالبة.

$0!=1 \quad , \quad 1!=1$

لو أردنا ان نعرف مضروب العدد صفر ونجعله = 1 بالتعريف.

لو كانت لدينا قطعة نقود نريد ان نرميها ثلاث رميات **2×3=6 (عدد الاحتمالات)**



H	**H**	**H**
H	**H**	**T**
H	**T**	**H**
H	**T**	**T**
T	**H**	**H**
T	**H**	**T**
T	**T**	**H**
T	**T**	**T**

*نتيجة رمي القطعة الثلاث رميات ما هي عدد الحالات التي تعطي صورتين فقط.

*لا يهم متى تحصل على الصورتين اي التسلسل غير مهم ولكن يهمنا العدد.

*في هذه الحالة اي التسلسل غير مهم تسمى التوليفات (التوفيقات).

ولكي نحصل على عدد الحالات (عدد المحاولات) من محاولات برنولي نستخدم القانون التالي:

(X^n) هذه تعني (**n**) مأخوذة (**x**) من المرات بغض النظر عن التسلسل حيث ان:

n=عدد محاولات برنولي

$$(x^n) = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$ **عدد المحاولات من التوليفات**

X= عدد المرات المطلوب حصولها للحدث

ملاحظة: - لا يمكن ل (x) ان تكون أكبر من (n)

اي $0 \leqslant x \leqslant n$

$$(2)^3 = \frac{3!}{2!\,(-)!} = \frac{3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 1} = 3$$

مثال: - ماهي عدد الحالات التي لا نحصل فيها على صورة من رمي قطعة النقود (3) ثلاث رميات؟

$$(0)^3 = \frac{3!}{0!\,(3-0)!} = \frac{3!}{1 \times 3!} = 1$$

المطلوب هو ليس الحالات وانما الاحتمالات. فتكون للمثال السابق. ما هو احتمال الحصول على صورتين نتيجة لرمي قطعة نقود متزنة ثلاث رميات.

$$p(x=2) = \frac{3}{8}$$

*لحساب احتمال حصول الحدث (x) من المرات نتيجة (n) من محاولات برنولي.

(يتبع قانون توزيع ذو الحدين)

لو طبقنا المثال السابق ←

$$p = \frac{1}{2} \quad , \quad \vartheta = \frac{1}{2} \; , \quad n = 3 \quad , \quad x = 2$$

$$p(x=2) = (2)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3!}{2!\,(3-2)!} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^1$$

مثال: لو كانت نسبة الاصابة بمرض معين في حقل دواجن هي 20% فما هو احتمال وجود

أ- أربع دجاجات مصابة في عينة مكونة من 6 دجاجات.

ب- عدم وجود دجاجة مصابة في عينة مكونة من 10 دجاجات؟

الحل :

$$p(x) = (x)^n \, p^x \vartheta^{n-x}$$

$$p = \frac{20}{100} = 0.2$$

$$n = 6 \;\; , \;\; x = 4 \;\; , \;\; p = 0.2 \;\; , \;\; \vartheta = 1 - 0.2 = 0.8$$

$$p(x)^n = (4)^6 \, (0.2)^4 \, (0.8)^{6-4}$$

$$= \frac{6!}{4!\,(6-4)!} (0.2)^2 (0.8)^2$$

$$= \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1(2 \times 1)} (0.2)^2 \, (0.8)^2 = 15 \times 0.0016 \times 0.64$$

$$p(x)^n = 0.01536$$

(ب)

$$n = 10 \quad , \quad x = 0 \quad , \quad p = 0.2 \quad , \quad \vartheta = 1 - 0.2 = 0.8$$

$$p(x = 0) = (0)^{10}(0.2)^0(0.8)^{10} = \frac{10!}{0!\,(10-0)!}(0.2)^0(0.8)^{10}$$

$$= \frac{10!}{0! \times 10!}(0.2)^0(0.8)^{10} = 1 \times 1 \times (0.8)^{10}$$

$$p(x - 0) = (0.8)^{10}$$

المصادر References:

1- الراوي، خاشع محمود .1979. المدخل الى علم الإحصاء. مديرية دار الكتب للطباعة والنشر. جامعة الموصل.

2- منصور، عوض وعزام صبري وعلي قوقزة. 1999. علم الإحصاء الوصفي المبرمج. دار الصفاء للنشر والتوزيع. عمان. الأردن.

3- بول. ج. هويل. 1985. المبادئ الأولية في الإحصاء. ترجمة د. بدرية شوقي عبد الوهاب. دار جون وايلي وابناءه للنشر. نيويورك.

4- كاظم، فوزي عبد الحميد وناظم يونس عبد ونعيم مطلك عبد الله. 2016. اساسيات علم الإحصاء. دار الكتب والوثائق. بغداد. العراق.

5- Scarisbrick, D. H. and A .G. Clewer. 2013. Practical statistical and Experimental Design for plant crop scince. Wiley