

:Permutation

يقصد بها عدد طرق الاختيار المرتب التي يمكن تكوينها من عدة أشياء يأخذها كلها أو بعضها ويرمز له (nPr) أي تبادل r من n وقانونه هو:

$$nPr = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال: - إذا كان لدينا أربعة حروف A,B,C,D واختير منها حرفان فما هي عدد الطرق التي يمكن بها اختيار هذين الحرفين؟

الحل: $n = 4$ $r = 2$

$$nPr = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 12$$

أي ان الطرق = 12

:Combination التوافيق

وهي عدد طرق الاختيار غير المرتب التي يمكن تكوينها من عدة أشياء يأخذها كلها أو بعضها ويرمز له nCr أو $\binom{n}{r}$ وقانونه هو:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

أي ان الترتيب في حالة التوافيق غير مهم

مثال: - ما عدد طرق الاختبار التي يمكن الحصول عليها لاختيار لجنة مؤلفة من (5) اشخاص من مجموع (9) اشخاص؟

الحل: - لاحظ بأن ترتيب الأشخاص هنا غير ضروري لان اختيار عمرو قبل زيد أو العكس هي نتيجة واحدة.

$$\therefore \binom{9}{5} = \frac{9!}{5!(9-5)!} = \frac{9!}{(5!)(4!)} = 126$$

ملاحظة

- أداة الربط (and) تعني عملية التقاطع وتعني الضرب.
 - أداة الربط (or) تعني عملية الاتحاد وتعني الجمع .
- هذا وهناك قاعدتان أساسيتان يعتمد عليهما كل من التبادل والتوافق وهما:

1- إذا كان عدد الطرق الممكنة لوقوع الحادث E_1 هو n وان عدد الطرق الممكنة لوقوع الحادث E_2 هو m وكان E_1 و E_2 حادثان متنافيان فإن عدد الطرق الممكنة لوقوع الحادث E_1 و E_2 هو $(n+m)$ من الطرق.

2- إذا كان عدد الطرق الممكنة لوقوع الحادث E_1 هو n وان عدد الطرق الممكنة لوقوع الحادث E_2 هو m وكان E_1 و E_2 حادثان مستقلان فإن عدد الطرق الممكنة لوقوع الحادث E_1 و E_2 هو (nm) من الطرق.

مثال: - صندوق به 6 كرات حمراء و 4 سوداء و 2 بيضاء فبكم طريقة يكن اختيار (5) كرات بحيث تكون 3 منها حمراء و 2 سوداء؟

الحل:

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1} = 20 \quad \text{عدد طرق اختيار 3 كرات حمراء}$$

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 2 \times 1} = 6 \quad \text{عدد طرق اختيار 2 كرة سوداء}$$

∴ عدد الطرق لاختيار (3) كرات حمراء و (2) سوداء هو طريقة $\binom{6}{3} \binom{4}{2} = (20)(6) = 120$

قوانين الاحتمال Laws of Probability:

لقد وضعت القوانين التالية لتسهيل حساب درجة الاحتمال عند وقوع حادثين أو أكثر بدلاً من ايجادها عن طريق تعريف الاحتمال.

وقبل شرح قوانين الاحتمالات نفرض ان هناك حادثان E_1 و E_2 فالتعابير التالية يقصد بها ما يلي:

$\rho(E_1 + E_2)$ - احتمال وقوع الحادث E_1 أو الحادث E_2 (أي احتمال وقوع أياً منهما فقط).

$\rho(E_1 E_2)$ - احتمال وقوع الحادث E_1 و الحادث E_2 معاً.

$\rho(E_2 / E_1)$ - احتمال وقوع أو حدوث E_2 علماً بأن الحادث E_1 قد وقع ويسمى بالاحتمال الشرطي.

وهناك قانونان مهمان في حساب درجة الاحتمال وهما:

قانون الجمع The Addition Law

قانون الضرب The Multiplication Law

قانون الجمع The Addition Law:

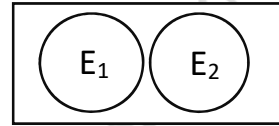
1- إذا كانت الاحداث متنافية: -

ويقصد بها الحوادث التي يستحيل حدوثها في آن واحد.

وينص قانون الجمع على انه إذا كان E_1 و E_2 حادثان متنافيان فإن احتمال ظهور الحادث E_1 و E_2

هو مجموع احتمال حدوث كل منهما منفرداً أي:

$$\rho(E_1 \text{ or } E_2) = \rho(E_1) + \rho(E_2)$$

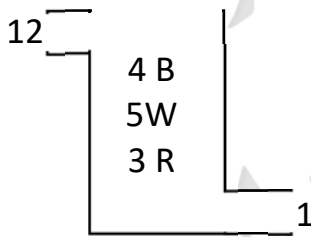


$$\rho(E_1 + E_2 + \dots + E_n) = \rho(E_1) + \dots + \rho(E_n)$$

مثال: صندوق يحتوي على 4 كرات سوداء و 5 كرات بيضاء و 3 كرات حمراء فإذا سحبت كرة واحدة فما

هو احتمال ان تكون إما سوداء أو بيضاء؟

الحل:



$$\rho(B \text{ or } W) = \rho(B) + \rho(W)$$

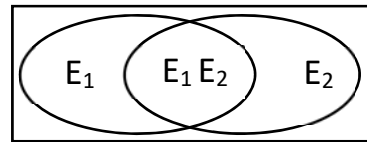
$$= \rho(B+W) = \frac{4}{12} + \frac{5}{12} = \frac{9}{12}$$

2- إذا كانت الاحداث غير متنافية:

إذا كان E_1 و E_2 حادثان غير متنافيان فإن احتمال حدوث أي منهما هو: حاصل جمع احتمال كل

منهما ناقص احتمال حدوثهما معاً أي:

$$\rho(E_1 + E_2) = \rho(E_1) + \rho(E_2) - \rho(E_1 E_2)$$



مثال: في احدى الكليات 25% من الطلبة رسب بالرياضيات (M) و 15% من الطلبة رسب في الكيمياء

(C) و 10% رسب في كلا الرياضيات والكيمياء. فإذا انتخب طالب منهم عشوائياً فما هو احتمال ان يكون

راسب في الرياضيات والكيمياء؟

الحل:

$$\begin{aligned}\rho(M \text{ أو } C) &= \rho(M) + \rho(C) - \rho(M.C) \\ &= 0.25 + 0.15 - 0.10 \\ \therefore \rho(M+C) &= 0.30\end{aligned}$$

مثال: اذا كان احتمال إصابة المحصول من قبل الآفة الزراعية A هو $\frac{3}{4}$ بينما احتمال إصابة المحصول من قبل الآفة الزراعية B هو $\frac{2}{3}$ فما هو احتمال إصابة هذا المحصول اذا تعرض لكلا الآفتين؟

الحل: $\rho(A) = \frac{3}{4}$ ، $\rho(B) = \frac{2}{3}$

بما ان الحادثين غير متنافيين لأنه من الممكن إصابة المحصول من قبل كل منهما لذا فإن احتمال إصابة المحصول بكلا الآفتين هو: -

$$\begin{aligned}\rho(A \text{ or } B) &= \rho(A) + \rho(B) - \rho(A.B) \\ &= \left(\frac{3}{4} + \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\right) \\ &= \left(\frac{3}{4} + \frac{2}{3}\right) - \frac{6}{12} \\ &= \rho(A+B) = \frac{11}{12}\end{aligned}$$

قانون الضرب The Multiplication Law:

1- عندما تكون الحوادث مستقلة:
وهي الحوادث التي لا يؤثر ظهور أحدها على نتيجة ظهور الحوادث الأخرى. فإذا كان E_1 و E_2 حادثان مستقلان. فإن احتمال حدوثهما معاً هو:

$$\rho(E_1 \text{ and } E_2) = \rho(E_1) \times \rho(E_2)$$

مثال: عند رمي قطعتي نقود. ما هو احتمال الحصول على صورة في كليهما؟

الحل: نرمز لاحتمال الحصول على الصورة من قطعة النقود الأولى $\rho(H_1)$.

نرمز لاحتمال الحصول على الصورة من قطعة النقود الثانية $\rho(H_2)$.

$$\therefore \rho(H_1 H_2) = \rho(H_1) \times \rho(H_2) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

2- عندما تكون الاحداث غير مستقلة.

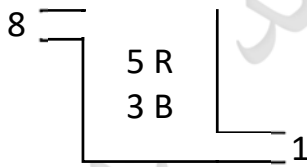
إذا كان E_1 و E_2 حادثان غير مستقلين فإن احتمال حدوثهما معاً هو:

$$\rho(E_1 \text{ and } E_2) = \rho(E_1) \times \rho(E_2/E_1)$$

حيث أن: E_2/E_1 : احتمال ظهور الحادث E_2 علماً بأن الحادث E_1 قد حدث.

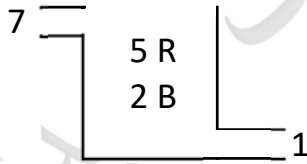
مثال: صندوق فيه 5 كرات حمراء و 3 سوداء فإذا سحبت كرتان سوية (أو سحبت كرتان على التوالي بدون ارجاع الكرة الأولى الى الصندوق) ما هو احتمال ان تكون كلتاها سوداء؟

الحل: احتمال الحصول على كرة سوداء في السحبة الأولى هو:



$$\rho(B_1) = \frac{3}{8}$$

أما في السحبة الثانية (بدون ارجاع الكرة المسحوبة الى الصندوق) فإن احتمال ان تكون الكرة سوداء هو:



$$\rho(B_2/B_1) = \frac{2}{7}$$

$$\therefore \rho(B_1 B_2) = \rho(B_1) \times \rho(B_2/B_1)$$

$$= \frac{3}{8} \times \frac{2}{7}$$

$$\therefore \rho(B_1 B_2) = \frac{6}{56}$$

امثلة وتمارين:

1- مثال: اذا كان عدد أسئلة امتحان الرياضيات 8 أسئلة والمطلوب الإجابة على 6 أسئلة بكم طريقة

يمكن ان يجيب الطالب في الحالات:

أ- للطالب حرية الاختيار كل سؤال تشمله عملية الاختيار.

ب- شرط الإجابة على سؤالين من الثلاثة الأولى.

ت- شرط الإجابة على السؤال الرابع (سؤال معين).

$$أ- nCr = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$\binom{8}{6} = \frac{8!}{6!(8-6)!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1} = 28 \text{ طريقة}$$

$$\text{ب- } nCr = \binom{3}{2} \binom{5}{4} = \left(\frac{3!}{2!(3-2)!} \right) \left(\frac{5!}{4!(5-4)!} \right) = \left(\frac{3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 1} \right) \left(\frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1} \right)$$

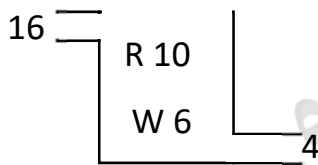
$$\therefore \binom{3}{2} \binom{5}{4} = 3 \times 5 = 15 \text{ طريقة}$$

$$\text{ت- } nCr = \binom{1}{1} \binom{7}{5} = \left(\frac{1!}{1!(1-1)!} \right) \left(\frac{7!}{5!(7-5)!} \right) = \left(\frac{1}{1 \times 1} \right) \left(\frac{7 \times 6 \times 5!}{5! \times 2 \times 1} \right)$$

$$\therefore \binom{1}{1} \binom{7}{5} = 1 \times 21 = 21 \text{ طريقة}$$

مثال: صندوق فيه 10 كرات حمراء (R) و6 كرات بيضاء (W). سحبت منه 4 كرات معاً من دون ارجاع.

جد عدد طرق وقوع كل من الاحداث الآتية:



1- أن تكون الكرات المسحوبة من نفس اللون (أي 4 حمراء أو 4 بيضاء).

2- ان تكون كرتين بيضاء وكرتين حمراء.

$$\text{عدد الطرق } nCr = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$R4 \text{ أو } W4 = 10C4 + 6C4 = \binom{10}{4} + \binom{6}{4}$$

or

$$= \frac{10!}{4!(10-4)!} + \frac{6!}{4!(6-4)!}$$

$$= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{4 \times 3 \times 2 \times 6!} + \frac{6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2 \times 1} = 33$$

المصادر :References

- 1- الراوي، خاشع محمود. 1979. المدخل الى علم الإحصاء. مديرية دار الكتب للطباعة والنشر. جامعة الموصل.
- 2- منصور، عوض وعزام صبري وعلي قوقزة. 1999. علم الإحصاء الوصفي المبرمج. دار الصفاء للنشر والتوزيع. عمان. الأردن.
- 3- بول. ج. هويل. 1985. المبادئ الأولية في الإحصاء. ترجمة د. بدرية شوقي عبد الوهاب. دار جون وايلي وابناءه للنشر. نيويورك.
- 4- كاظم، فوزي عبد الحميد وناظم يونس عبد ونعيم مطلق عبد الله. 2016. اساسيات علم الإحصاء. دار الكتب والوثائق. بغداد. العراق.
- 5- Scarisbrick, D. H. and A .G. Clewer. 2013. Practical statistical and Experimental Design for plant crop science. Wiley