جامعة الانبار
كلية علوم الحاسوب وتكنولوجيا المعلومات
قسم أنظمة شبكات الحاسوب

رياضيات ١

Mathematics 1

تعريف المشتقة

The Definition of the Derivative

Interpretation of the Derivative

المرحلة الأولى – الفصل الاول

م.م. عدي عبد هزام

الفصل الرابع

المشتقات

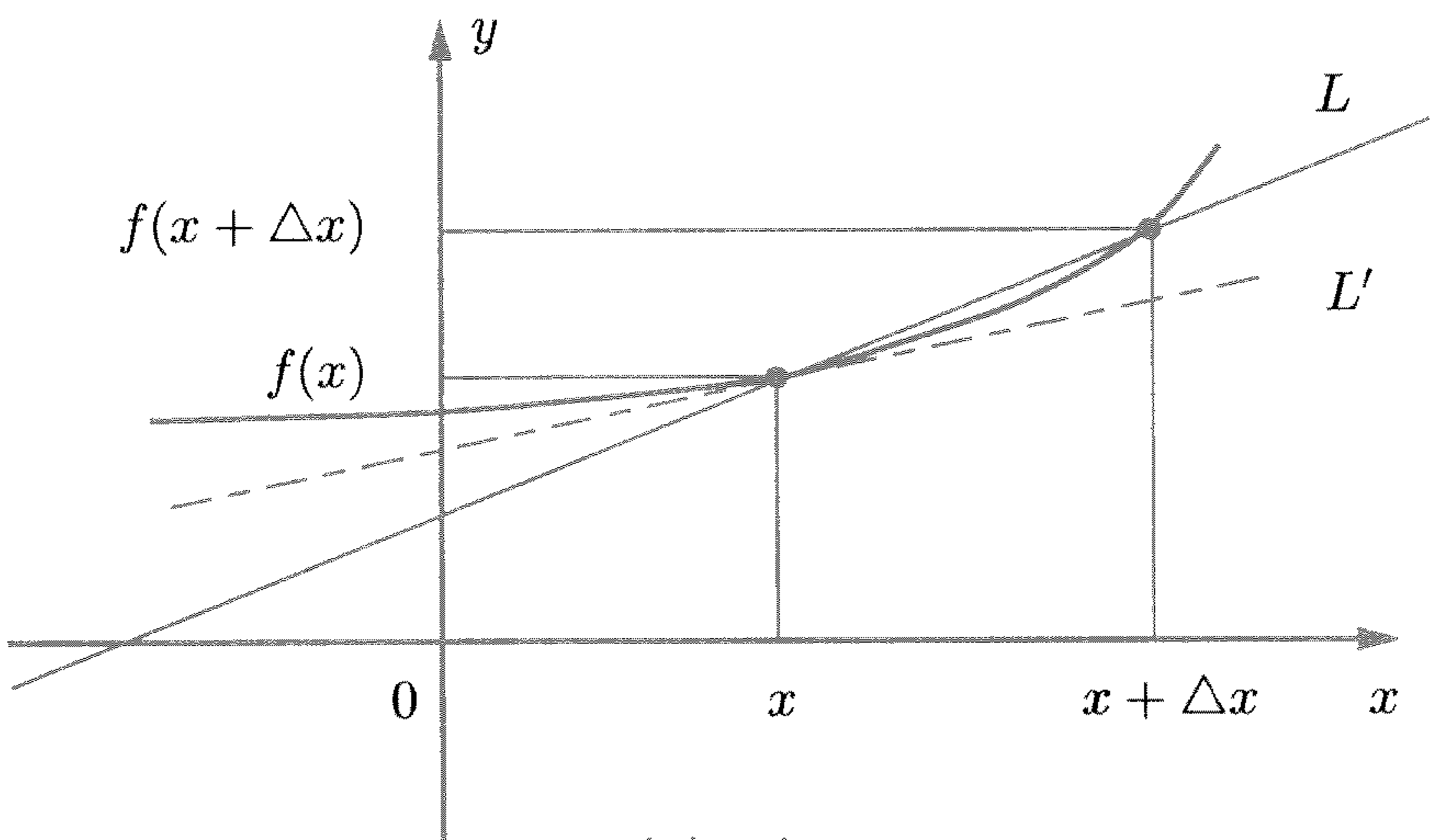
Derivatives

1.4 المشتقة الأولى (First Derivative)

لنفرض أن $(x, f(x))$ نقطة على رسم الدالة $y = f(x)$.

إذا كانت $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ نقطة أخرى على بيان الدالة $y = f(x)$ حيث Δx هو الفرق في الإحداثي السيني للنقطتين، فإن ميل المستقيم L المار بالنقطتين هو:

$$m_L = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{x + \Delta x - x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



الشكل 1.4

لنترك النقطة $(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$ تتحرك على المنحنى $y=f(x)$؛ حيث تصغر Δx تدريجياً حتى تؤول إلى الصفر.

عندما تؤول Δx إلى الصفر، يمس المستقيم L' المنحنى في نقطة واحدة فقط، وبذلك يكون المستقيم L' مماساً للمنحنى $y=f(x)$. ميل المماس للمنحنى $y=f(x)$ عند النقطة $(x, f(x))$ هو:

$$m=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

بشرط أن تكون هذه النهاية موجودة.

ميل المنحنى $y=f(x)$ عند النقطة $(x, f(x))$ هو ميل المماس لهذا المنحنى عند النقطة $(x, f(x))$.

تعريف 1.4

لنفرض أن الدالة f معرّفة على فترة مفتوحة تحتوي على x.

المشتقة الأولى f' عند x وتكتب $f'(x)$:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

بشرط وجود النهاية.

إذا وجدت المشتقة الأولى $f'(x)$، فإننا نقول إن الدالة f قابلة للاشتاق عند x (Differentiable at x)، أو لها مشتقة أولى عند x.

نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (a, b)، إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند كل نقطة من نقط (a, b).

ونقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق على الفترة المغلقة $[a, b]$، إذا كانت f قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (a, b)، وكانت النهايتان:

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(b+\Delta x)-f(b)}{\Delta x}, \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

موجودتين.

طريقة الخطوات الأربع لإيجاد المشتقة الأولى (من التعريف):

لأيجاد المشتقة الأولى للدالة f عند x، استخدم طريقة الخطوات الأربع التالية:

1) أوجد $f(x+\Delta x)$.

2) أوجد $f(x+\Delta x)-f(x)$.

3) أوجد خارج قسمة الفرق

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

4) أخيراً للحصول على $f'(x)$ أوجد

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

مثـال 1

أوجد المشتقة الأولى للدالة $f(x)=x^2+1$.

الحـل

(1 $f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^2+1=x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2+1$

(2 $f(x+\Delta x)-f(x)=x^2+12x\Delta x+(\Delta x)^2+1-x^2-1$

$$=2x\Delta x+(\Delta x)^2$$

(3 $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\dfrac{2x\Delta x-(\Delta x)^2}{\Delta x}$

$$=\frac{\Delta x(2x-\Delta x)}{\Delta x} = 2x-\Delta x$$

(4 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x - \Delta x) - 2x$$

إذن $f'(x) = 2x$.

النظرية التالية توضح العلاقة بين القابلية للاشتقاق والاتصال، وهي العلاقة التي تؤكد أن القابلية للاشتقاق عند نقطة شرط أقوى من كون الدالة متصلة عند تلك النقطة.

نظرية 1

إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق عند x_1، فإن f متصلة عند x_1.

البرهان

إذا كان x في نطاق f وكان $x \neq x_1$، فيمكن كتابة $f(x)$ كما يلي:

$$f(x) = f(x_1) + f(x) - f(x_1)$$

$$= f(x_1) + \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}(x - x_1)$$

وبأخذ نهاية الطرفين، واستخدام نظريات النهايات، نجد أن:

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_1} f(x) &= \lim_{x \to x_1} f(x_1) + \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \lim_{x \to x_1} (x - x_1) \\ &= f(x_1) + f'(x_1).0 = f(x_1)\end{aligned}$$

إذن من تعريف الاتصال، نستنتج أن الدالة f متصلة عند x_1.

ننهي هذا البند ببعض الرموز، التي قد تستخدم للدلالة على المشتقة الأولى. لنفرض أن $y = f(x)$، الرموز التالية كلها تستخدم للدلالة على المشتقة الأولى f' بالنسبة للمتغير x:

$f'(x)$ و $D_x[f(x)]$ و $\frac{d}{dx}f(x)$ و y' و $\frac{dy}{dx}$ و $D_x y$.

تمارين 1.4

أوجد المشتقة الأولى للدوال التالية مستخدماً طريقة الخطوات الأربع:

1) $f(x) = 2$

2) $f(x) = 12 - 6x$

3) $f(x) = 2 + 8x - 5x^2$

4) $f(x) = x^3 + x$

5) $f(x) = \dfrac{1}{2x}$

6) $f(x) = \dfrac{7}{\sqrt{x}}$

7) $y = 2x^3 - 4x + 1$

8) $y = 8 - x^3$

9) $y = (x + 5)^{-1}$

10) $y = (2x + 3)^2$

11) بيّن أن الدالة $f(x) = |x - 5|$ غير قابلة للاشتقاق عند $x = 5$.

12) بيّن أن الدالة $f(x) = [x]$ غير قابلة للاشتقاق عند أي عدد صحيح n.

13) أوجد معدل تغيّر مساحة الدائرة A بالنسبة إلى نصف قطرها r.

14) أوجد معدل تغيّر حجم كرة V بالنسبة إلى نصف قطرها r.

15) أوجد معادل المماس للمنحنى $f(x) = \sqrt{x + 1}$ عند النقطة $(1, \sqrt{2})$.

2.4 بعض القوانين لإيجاد المشتقة الأولى

لإيجاد المشتقة الأولى للدالة $f(x) = x^4(2x^2+3)^5 + \dfrac{x^5}{(x+1)^4}$
بطريقة الأربع خطوات، تحتاج إلى عمليات جبرية طويلة ومملة (حاول إيجاد المشتقة الأولى لهذه الدالة بطريقة الأربع خطوات).

لاحظنا أن طريقة الأربع خطوات قد تكون صعبة لبعض الدوال، لذلك من المطلوب إيجاد صيغ أبسط من هذه الطريقة.

نحاول في هذا البند إعطاء قوانين والبرهنة عليها حتى نطمئن إلى استخدامها.

> 1) إذا كانت f دالة ثابتة $f(x) = k$؛ حيث أن k مقدار ثابت، فإن $f'(x) = 0$.

البرهان

نستخدم طريقة الخطوات الأربع للبرهنة على هذا القانون.

بما أن $f(x+\Delta x) = k$ فإن $f(x+\Delta x) - f(x) = k - k = 0$

ومن ذلك

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$$

إذن

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$

مثال 2

إذا كانت $f(x) = 2^6$، فإنه بناءً على هذا القانون $f'(x) = 0$.

2) إذا كانت $f(x) = x^n$، حيث n عدد صحيح موجب، فإن:

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

البرهان

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{(x+\Delta x) - x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} [(x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2}x + (x+\Delta x)^{n-3}x^2 + \dots + (x+\Delta x)x^{n-2} + x^{n-1}]$$

$$= x^{n-1} + x^{n-2}.x + x^{n-3}.x^2 + \dots + x.x^{n-2} + x^{n-1} = nx^{n-1}$$

وهنا جمع x^{n-1} عدد n من المرات، يكون nx^{n-1}.

إذن $f'(x) = nx^{n-1}$.

مثال 3

إذا كانت $f(x) = x^{18}$، فإن $f'(x) = 18x^{17}$.

3) إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق، فإن الدالة kf تكون قابلة للاشتقاق أيضاً، حيث أن k مقدار ثابت، و $\frac{d}{dx}kf = k\frac{df}{dx}$.

البرهان

$$\frac{d}{dx}kf(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{kf(x+\Delta x) - kf(x)}{\Delta x}$$

$$= k \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

وبناءً على نظرية النهايات $\frac{d}{dx}kf(x) = k\frac{d}{dx}f(x)$.

استخدمنا هنا خاصية النهاية، وهي:

$$\lim_{x\to a} kg(x) = k\lim_{x\to a} g(x)$$

مثـــال 4

أوجد $\frac{d}{dx}(9x^2)$.

الحـــل

حيث أن 9 مقدار ثابت، فإن

$$\frac{d}{dx}(9x^2) = 9\frac{dx^2}{dx} = 9(2x) = 18x$$

4) إذا كانت f وg دالتين قابلتين للاشتقاق، فإن الدالة $f+g$ تكون قابلة للاشتقاق أيضاً و $\frac{d}{dx}(f+g)(x) = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$.

البرهان

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(f+g)(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(f+g)(x+\Delta x)-(f+g)(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)-f(x)-g(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} \quad \text{(من نظرية النهايات)} \\
&= \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)
\end{aligned}$$

مثـــال 5

أوجد $f'(x)$ إذا كانت $f(x) = 2x^6 + x^5 + x^3$.

الحــل

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(2x^6+x^5+x^3) &= \frac{d}{dx}(2x^6)+\frac{d}{dx}(x^5)+\frac{d}{dx}(x^3)\\ &= 2\frac{d}{dx}(x^6)+5x^4+3x^2\\ &= 12x^5+5x^4+3x^2\end{aligned}$$

من استخدام القانون (3) ووضع $k=-1$، نجد أن:

$$\frac{d}{dx}(-f(x))=-\frac{d}{dx}f(x)$$

إذن نستطيع إيجاد قانون لتفاضل الدالة $f-g$، وذلك باستخدام القانون (4).

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(f-g)(x)=\frac{d}{dx}(f+(-g))(x)=\frac{d}{dx}f(x) &+ \frac{d}{dx}(-g)(x))\\ = \frac{d}{dx}f(x)-\frac{d}{dx}g(x)\end{aligned}$$

ومن هذا نستنتج القانون

(5 $\frac{d}{dx}(f-g)(x)=\frac{d}{dx}f(x)-\frac{d}{dx}g(x)$

مثـــال 6

أوجد $f'(x)$ إذا كانت $f(x)=x^3-2x-1$

الحــل

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x^3-2x-1) &= \frac{d}{dx}(x^3)-\frac{d}{dx}(2x)-\frac{d}{dx}(1)\\ &= 3x^2-2-0=3x^2-2\end{aligned}$$

نستطيع توسيع القانون (4) إلى أكثر من دالتين.

(6 إذا كانت $f_1,f_2,\ldots f_n$ دوال قابلة للاشتقاق.

الدالة $f_1+f_2+\ldots+f_n$ قابلة للاشتقاق و

$$\frac{d}{dx}(f_1+f_2+\ldots+f_n)(x)=\frac{d}{dx}f_1(x)+\frac{d}{dx}f_2(x)+\ldots+\frac{d}{dx}f_n(x)$$

مثـــال 7

إذا كانت $g(t) = 17 - 4t^2 + 8t^3$، أوجد $g'(t)$

الحـــل

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{d}{dt}(17 - 4t^2 + 8t^3) = \frac{d}{dt}(17) - \frac{d}{dt}(4t^2) + \frac{d}{dt}(8t^3) \\ &= 0 - 4\frac{d}{dt}(t^2) + 8\frac{d}{dt}(t^3) = 0 - 8t + 24t^2 \\ &= -8t + 24t^2 \end{aligned}$$

مثـــال 8

أطلقت مقذوفة إلى أعلى بسرعة 400 متر في الثانية وبعد t ثانية أصبحت تبعد عن الأرض بالمسافة $S(t) = -16t^2 + 400t$، أوجد:

أ) الزمن الذي تأخذه المقذوفة حتى تصطدم بالأرض.

ب) سرعة المقذوفة عندما تصطدم بالأرض.

ج) أعلى ارتفاع تصله المقذوفة.

الحـــل

عندما تصطدم المقذوفة بالأرض تكون مسافتها عن الأرض صفراً، أي أن:

$$S(t) = -16t^2 + 400t = 0$$

ومن ذلك $t(400 - 16t) = 0$

وهذا يعني أن $t = 0$ أو $t = 25$ ثانية.

$t=0$ يعني أن الجسم لم يتحرك بعد، ولهذا فإن $t=25$ ثانية.

السرعة عند t هي: $V(t)=S'(t)=-32t+400$

إذن $V(25)=-32(25)+400=-400$ متر/ثانية

يمكن الحصول على أعلى ارتفاع للمقذوفة عندما تكون $V(t)=0$ وهذا يعني أن: $-32t+400=0$

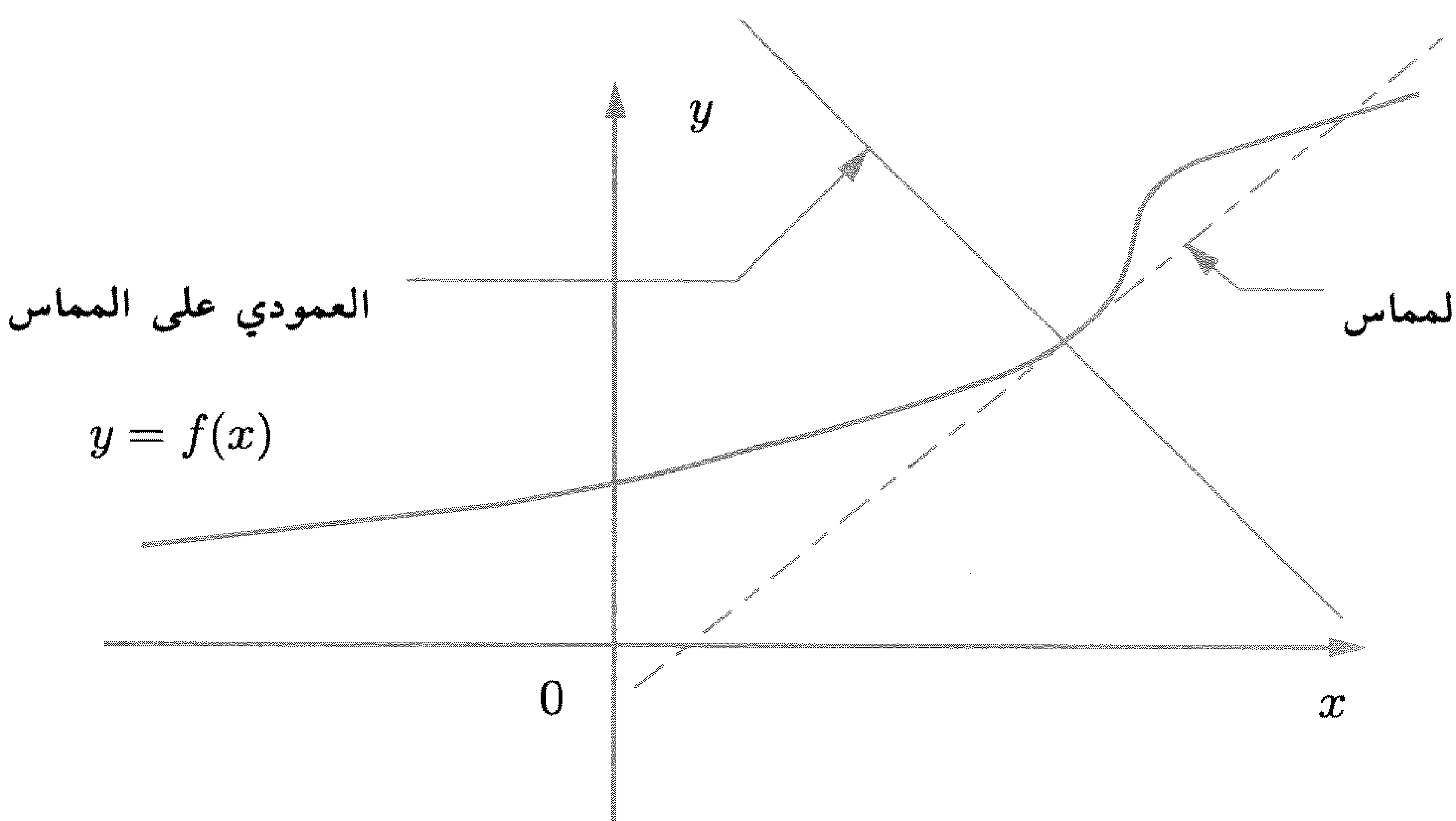
ومن ذلك $t=25/2$ ثانية.

أعلى ارتفاع تصله المقذوفة بعد $25/2$ ثانية، أي أن:

$S(25/2)=-16(25/2)^2+400(25/2)=2500$ متر

تعريف 1.4: (العمودي على المماس)

العمودي على المماس لمنحنى عند نقطة، هو المستقيم الذي يكون عمودياً على المماس عند تلك النقطة. (أنظر الشكل 2.4).



الشكل 2.4

تمارين 2.4

في التمارين من 1 إلى 6، أوجد المشتقة الأولى للدالة المعطاة.

1) $f(x) = x^5$ 2) $g(t) = t^{20} - t^2$

3) $f(x) = 16$ 4) $g(t) = 1 - t - t^4 - t^7$

5) $h(r) = -3r^2 + 12r^3$ 6) $f(x) = 3x^2 + 19x + 1$

في التمارين من 7 إلى 11، أوجد معادلتي المماس والعمودي على المماس، للمنحنى المعطى عند النقطة المعطاة.

7) $y = x^4$ ، $(1,1)$

8) $y = 6x^6 - 2x^4 + 2x^3$ ، $(1,6)$

9) $y = 1 - x + 2x^2 - 3x^3 + 4x^4$ ، $(1,3)$

10) $y = x^7 - 6x^5$ ، $(1,-5)$

11) $y = 6 + 3x^2 + 4x^{10}$ ، $(0,6)$

12) أوجد النقطة على بيان المنحنى $y = 4x^{10} + 3x^2 + 6$ والتي يكون عندها مماس المنحنى أفقياً.

13) أوجد معادلة المماسين للمنحنى $y = x^2 + 3$ واللذان يمران خلال النقطة $(1,0)$.

[إرشاد: لاحظ أن أي نقطة على المنحنى تكون على الشكل $(b, b^2 + 3)$].

14) إذا كانت المسافة التي تقطعها طائرة معطاة بالمعادلة $S = 1 + 4t + t^2$، كم تكون سرعة الطائرة (بالقدم في الثانية) بعد 10 ثوان؟ وكم تكون سرعتها بعد 20 ثانية؟

إرشاد: السرعة هي المشتقة الأولى للمسافة بالنسبة للزمن).

15) ما هي النقط على بيان المنحنى $y = x^2$ حيث العمودي على المماس عند تلك النقط يمر خلال النقطة $(1,0)$؟

3.4 قانونا الضرب والقسمة

1) قانون الضرب

إذا كانت f وg دالتين قابلتين للاشتقاق، فإن الدالة $f.g$ تكون قابلة للاشتقاق و

$$\frac{d}{dx}(f.g)(x) = f(x)\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\frac{d}{dx}f(x)$$

قانون الضرب يوضح أن المشتقة الأولى لحاصل ضرب دالتين، تساوي الدالة الأولى ضرب المشتقة الأولى للدالة الثانية مضافاً إلى ذلك الدالة الثانية ضرب المشتقة الأولى للدالة الأولى.

البرهان

$$\frac{d}{dx}(f.g)(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x}$$

بإضافة وطرح الحد $f(x)g(x+\Delta x)$ في البسط، نجد أن:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(f.g)(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \Big(\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x} \\
&\qquad + \frac{f(x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x}\Big) \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \Big(\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x}\Big) \\
&\qquad + \lim_{\Delta x \to 0} \Big(\frac{f(x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x}\Big)
\end{aligned}$$

باستخدام نظريات النهاية نجد أن

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(f.g)(x) &= \lim_{\Delta x\to 0} g(x+\Delta x) \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right)\\ &\quad + \lim_{\Delta x\to 0} f(x) \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right)\\ &= g(x)\frac{d}{dx}f(x)+f(x)\frac{d}{dx}g(x)\end{aligned}$$

حيث أن g قابلة للاشتقاق، فإن g متصلة، ولهذا فإن:

$$\lim_{\Delta x\to 0} g(x+\Delta x) = g(x)$$

مثـــال 9

أوجد $h'(t)$ إذا كانت $h(t)=(t^2+2)(t^3-5)$.

الحـــل

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}h(t) &= \frac{d}{dt}((t^2+2)(t^3-5))\\ &= (t^2+2)\frac{d}{dt}(t^3-5)+(t^3-5)\frac{d}{dt}(t^2+2)\\ &= (t^2+2)(3t^2)+(t^3-5)(2t)\\ &= 3t^4+6t^2+2t^4-10t\\ &= 5t^4+6t^2-10t\end{aligned}$$

2) قانون القسمة:

إذا كانت f وg دالتين قابلتين للاشتقاق عند x، وكان $g(x)\neq 0$، فإن الدالة $\frac{f}{g}$ تكون قابلة للاشتقاق عند x، وتكون

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{g(x)\frac{d}{dx}f(x)-f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{(g(x))^2}$$

هذه القاعدة توضح أن المشتقة الأولى لخارج قسمة دالتين، تساوي المقام ضرب المشتقة الأولى للبسط مطروحاً من ذلك البسط ضرب المشتقة الأولى للمقام، وكل ذلك مقسوماً على مربع المقام.

البرهان

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}-\dfrac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x)-f(x)g(x+\Delta x)}{g(x)g(x+\Delta x)\Delta x}$$

بإضافة وطرح الحد $f(x)g(x)$ في البسط، نجد أن:

$$\frac{d}{dx}(\frac{f}{g})(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+\Delta x)}{g(x)g(x+\Delta x)\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x)\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}-f(x)\dfrac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}}{g(x)g(x+\Delta x)}$$

$$= \frac{g(x)\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}-f(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}}{g(x)\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}g(x+\Delta x)}$$

باستخدام نظريات النهايات نجد أن

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{g(x)\dfrac{d}{dx}f(x)-f(x)\dfrac{d}{dx}g(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

استخدامنا أيضاً $\lim_{\Delta x\to 0} g(x+\Delta x) = g(x)$ ، وذلك من اتصالية g.