جامعة الانبار
كلية علوم الحاسوب وتكنولوجيا المعلومات
قسم أنظمة شبكات الحاسوب

رياضيات ١

Mathematics 1

تعريف المشتقة

The Definition of the Derivative

Interpretation of the Derivative

المرحلة الأولى – الفصل الاول

م.م. عدي عبد هزام

هذه القاعدة توضح أن المشتقة الأولى لخارج قسمة دالتين، تساوي المقام ضرب المشتقة الأولى للبسط مطروحاً من ذلك البسط ضرب المشتقة الأولى للمقام، وكل ذلك مقسوماً على مربع المقام.

البرهان

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{g(x)g(x+\Delta x)\Delta x}$$

بإضافة وطرح الحد $f(x)g(x)$ في البسط، نجد أن:

$$\frac{d}{dx}(\frac{f}{g})(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{g(x)g(x+\Delta x)\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x)\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f(x)\dfrac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}}{g(x)g(x+\Delta x)}$$

$$= \frac{g(x)\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f(x)\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}}{g(x)\lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x)}$$

باستخدام نظريات النهايات نجد أن

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{g(x)\dfrac{d}{dx}f(x) - f(x)\dfrac{d}{dx}g(x)}{(g(x))^2}$$

استخدامنا أيضاً $\lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x) = g(x)$ ، وذلك من اتصالية g.

مثــال 10

أوجد $f'(x)$ إذا كان $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$.

الحــل

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{(x-1)\dfrac{d}{dx}x - x\dfrac{d}{dx}(x-1)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{(x-1)(1)-x(1)}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

عرفنا فيما تقدم أنه إذا كانت $f(x)=x^n$، عندما يكون n عدداً صحيحاً موجباً، فإن $f'(x)=nx^{n-1}$.

بمساعدة قانون القسمة، نستطيع تعميم هذه القاعدة في حالة الأعداد الصحيحة السالبة أيضاً.

> 3) إذا كان $y=x^{-n}$ عندما يكون n عدداً صحيحاً موجباً، فإن:
> $$\frac{dy}{dx}=(-n)x^{-n-1}$$

البرهان

$$y=x^{-n}=\frac{1}{x^n}$$

باستخدام قانون القسمة، نحصل على:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^n(0)-(1)(nx^{n-1})}{(x^n)^2} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}}$$

$$= (-n)x^{n-1-2n} = (-n)x^{-n-1}$$

الآن نستطيع القول إنه إذا كانت $f(x) = x^n$، فإن $f'(x) = nx^{n-1}$ لكل عدد صحيح n.

مثال 11

أوجد $f'(x)$ إذا كانت $f(x) = \frac{1}{x}$.

الحل

بما أن $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$، فإن: $f'(x) = (-1)x^{-1-1} = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$

تمارين 3.4

أوجد المشتقة الأولى في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x) = x(x^2+1)$

2) $f(x) = (1+x+x^5)(2-x-x^6)$

3) $f(x) = \dfrac{2-x-x+x^6}{1+x+x^5}$

4) $f(x) = \dfrac{1}{x^3+3x}$

5) $f(t) = (1+x+x^5)(2-x-x^6)$

في المسائل من 6 إلى 8، أوجد معادلة المماس للمنحنى الذي يمر خلال النقطة المعطاة.

6) $f(x) = 4x(x^5+1)$ ، $(1,8)$

7) $f(x) = \dfrac{x^3+2}{x^2+2}$ ، $(0,1)$

8) $f(x) = \dfrac{1+x}{x^2}$ ، $(1,2)$

9) أوجد معادلة العمودي على المماس للمنحنى $y = \frac{1}{x^7}$ عند النقطة $(1,1)$.

10) إذا كان $f(x)=g(x)h(x)l(x)$، استخدم قانون الضرب للبرهنة على أن:

$$\frac{df}{dx}=gh\frac{dl}{dx}+gl\frac{dh}{dx}+hl\frac{dg}{dx}=ghl'+gh'l+g'hl$$

11) إذا كان $p(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$، برهن أن:

$$\frac{p'(x)}{p(x)}=\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}$$

12) أوجد $f'(x)$ إذا كانت $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+2x}{\sqrt{x}-4}$.

13) أوجد $f'(x)$ إذا كانت $f(x)=\dfrac{x^{1/3}}{1-\sqrt{x}}$.

14) أوجد $f'(x)$ إذا كانت $f(x)=ax\left(\dfrac{x+b}{x+c}\right)$. حيث a,b,c ثوابت.

15) أوجد النقط على بيان المنحنى $f(x)=\dfrac{5-x}{6-x}$ التي يمرّ المماس عندها خلال نقطة الأصل.

4.4 المشتقة الأولى للدالة التركيبية

The Derivative of Composite Function

من دراسة الدوال تعرّفنا إلى الدالة التركيبية $f \circ g$، والآن نحاول الحصول على قانون لإيجاد المشتقة الأولى للدالة التركيبية.

قاعدة السلسلة (Chain Rule)

إذا كانت f وg دالتين قابلتين للاشتقاق، وكان $u = g(x)$، فإن الدالة التركيبية $y = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(u)$ تكون قابلة للاشتقاق ويكون:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(f \circ g)(x) = f'(g(x))g'(x) = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

البرهان

نفترض أن $g(x + \Delta x) - g(x) \neq 0$ لتسهيل البرهان.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} f(g(x)) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x} \cdot \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{g(x + \Delta x) - g(x)} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))}{g(x + \Delta x)) - g(x)} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\ &= f'(g(x))g'(x)\end{aligned}$$

نلاحظ أنه عندما $\Delta x \to 0$ فإن $g(x + \Delta x) \to g(x)$؛ لأن g دالة قابلة للاشتقاق، وبالتال متصلة.

مثـال 12

أوجد y' إذا كانت $y = \frac{1}{(x^3 + 1)^5}$.

الحـــل

لنفرض أن $u = x^3 + 1$، إذن $y = \frac{1}{u^5}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} = \frac{d}{du}\left(\frac{1}{u^5}\right).\frac{d}{dx}(x^3+1)$$

$$= -\frac{5}{u^6}.3x^2 = \frac{-5}{(x^3+1)^6}.3x^2 = \frac{-15x^2}{(x^3+1)^6}$$

القاعدة العامة للأس (General Power Rule)

إذا كانت $u(x)$ (دالة في x) قابلة للاشتقاق، وكان n عدداً صحيحاً، فإن:

$$\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

البرهان

إذا كان $y = u^n$ و u دالة في x، فإن:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$$

وذلك باستخدام قاعدة السلسلة.

إذن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du^n}{dx} = nu^{n-1}.\frac{du}{dx}$$

مثـــال 13

إذا كانت $f(x) = (x^2-5)^4$، أوجد $f'(x)$.

الحـــل

$$f'(x) = 4(x^2-5)^3\frac{d}{dx}(x^2-5)$$
$$= 4(x^2-5)^3(2x) = 8x(x^2-5)^3$$

تمارين 4.4

في التمارين من 1 إلى 5، استخدم قاعدة السلسلة لإيجاد المشتقة الأولى:

1) $f(x) = (x^2 - 1)^2$

2) $g(x) = (1 - x^2 + x^5)^3$

3) $h(t) = (t^2 - t^3)^4$

4) $f(x) = (1 - x^6)^6$

5) $f(x) = [(x+1)/(x-1)]^3$

في التمارين من 6 إلى 9، استخدم القاعدة العامة للأس لإيجاد المشتقة الأولى:

6) $f(x) = (x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)^2$

7) $f(x) = (x^2 - 2)^5 (x^4 + 3)^3$

8) $h(t) = (t^{-2} + t^{-3} + t^{-5} + t^{-7})^{-1}$

9) $f(x) = \left[\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^{-1} + 4\right]^{-1}$

10) إذا كانت f و g دالتين قابلتين للاشتقاق، وكان $f(g(x)) = x$، برهن على أن: $f'(g(x)) = \dfrac{1}{g'(x)}$.

11) إذا كان $(x-6)^2$ قاسماً للدالة $P(x)$، برهن على أن $(x-6)$ قاسم للدالة $P'(x)$.

12) أعطِ مثالاً لدالة f بحيث أن $f \circ f \neq f.f$.

13) أوجد ما يلي:

أ) $\dfrac{d}{dx}\left[f\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)\right]$

ب) $\dfrac{d}{dx}\left[[f(x)]^2 + 1\right]$

14) برهن أنه إذا كان $y = x^{-1}$، فإن $\frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^n n! x^{-n-1}$.

15) أوجد $\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{x+1}\right)\right]$

5.4 المشتقة الأولى لدالة القوى
The First Derivative of a Power Function

نحاول في هذا البند إيجاد المشتقة الأولى للدالة $y = x^r$، حيث r أي عدد قياسي. لقد أوضحنا أنه إذا كان r عدداً صحيحاً (موجباً أو سالباً)، فإن:

$$\frac{dy}{dx} = rx^{r-1}$$

سنثبت صحة هذه القاعدة في حالة أي عدد قياسي.

نظرية 2

إذا كان n عدداً صحيحاً موجباً، فإن المشتقة الأولى للدالة $y = x^{\frac{1}{n}}$، هي:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$$

البرهان

إذا كانت $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$، فإن:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^{1/n} - x^{1/n}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n}}}{[(x+\Delta x)^{\frac{1}{n}}]^n - [x^{\frac{1}{n}}]^n}$$

ومن الجبر نعرف أن:

$$\frac{a^n - b^n}{a-b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}$$

إذن

$$\frac{b-a}{a^n - b^n} = \frac{1}{a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}}$$

بوضع $a = (x+\Delta x)^{\frac{1}{n}}$ و $b = x^{\frac{1}{n}}$ في آخر نهاية، نجد أن:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n}}}{\left((x+\Delta x)^{\frac{1}{n}}\right)^{n} - \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n}}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\left((x+\Delta x)^{n-1}\right)^{n-1} + \left((x+\Delta x)^{\frac{1}{n}}\right)^{n-2}x^{\frac{1}{n}} + \ldots + \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}}$$

$$= \frac{1}{x^{\frac{n-1}{n}} + x^{\frac{n-2}{n}}x^{\frac{1}{n}} + \ldots - x^{\frac{1}{n}}x^{\frac{n-2}{n}} + x^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$

مثـــال 14

أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كان $y = x^{\frac{1}{5}}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1} = \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{5x^{\frac{4}{5}}}$$

نظرية 3

إذا كانت $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$؛ حيث أن m و n عددان صحيحان، فإن:

$$f'(x) = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$$

البرهان

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}x^{\frac{m}{n}} = \frac{d}{dx}[x^{\frac{1}{n}}]^{m}$$

نفترض أن $u = x^{\frac{1}{n}}$، ومن ذلك نجد أن $f(x) = u^{m}$.

باستخدام قاعدة السلسلة، نجد أن:

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{du}f(x).\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}x^{\frac{m}{n}} = \frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{n}})^{m} = \frac{d}{dx}u^{m} = mu^{m-1}.\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$

$$= m\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1}.\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n}\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1}\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{1-n}$$

$$= \frac{m}{n}\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1+1-n} = \frac{m}{n}\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m-n} = \frac{m}{n}x^{\frac{(m-n)}{n}}$$

$$= \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$$

مثــال 15

إذا كان $s = (t^3 + 2t + 3)^{\frac{11}{9}}$، أوجد $\frac{ds}{dt}$.

الحــل

نفترض أن $u = t^3 + 2t + 3$، ومن ذلك نجد أن $s = u^{\frac{11}{9}}$

إذن

$$\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{du} \cdot \frac{du}{dt} = \frac{11}{9}u^{\frac{11}{9}-1}.(3t^2+2)$$

$$= \frac{11}{9}(3t^2+2)(t^3+2t+3)^{\frac{2}{9}}$$

لا نستطيع في هذ االمستوى البرهنة على أن هذه القاعدة صحيحة في حالة الأعداد غير القياسية. عندما يتقدم بنا المسار سنبرهن على ذلك، ولهذا نستطيع القول إنه إذا كانت $f(x) = x^\lambda$، حيث λ عدد حقيقي (قياسي أو غير قياسي)، فإن:

$$f'(x) = \lambda x^{\lambda-1}$$

ملخص

المشتقة الأولى للدالة	الدالة	
$f'(x)=0$	$f(x)=c$ ؛ c ثابت	(1
$g'(x)=cf'(x)$	$g(x)=cf(x)$ ؛ c ثابت	(2
$\frac{d}{dx}(f(x)+g(x))=f'(x)+g'(x)$	$f(x)+g(x)$	(3
$f'(x)=rx^{r-1}$.	$f(x)=x^r$ ؛ r عدد حقيقي	(4
$\frac{d}{dx}(f.g)(x)=f(x)g'(x)+g(x)f'(x)$	$f(x).g(x)$	(5
$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$	$\frac{f(x)}{g(x)}$	(6
$\frac{dy}{dx}=r[f(x)]^{r-1}\frac{d}{dx}f(x)$	$y=[f(x))]^r$	(7
$\frac{dy}{dx}(f\circ g)(x)=f'(g(x))g'(x)$	$(f\circ g)(x)$	(8

تمارين 5.4

أوجد المشتقة الأولى للدوال التالية:

1) $f(x) = 5x^{-\frac{2}{9}}$

2) $f(x) = (x^2 - 1)^{-\frac{3}{2}}$

3) $f(x) = (x^3 + 1)^{\frac{3}{5}}$

4) $g(t) = (t^3 + t^2 + 1)^{\frac{5}{8}}$

5) $h(t) = (t^5 - 1)^{\frac{3}{4}}(t^3 + 2)^{\frac{6}{5}}$

6) $f(x) = (x^2 - x^3)^4$

7) أوجد معادلتي المماس والعمودي على المماس للمنحنى $f(x) = x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}}$ ، عند النقطة $(1,2)$.

8) أوجد المشتقة الأولى للدالة $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$.

9) أوجد معادلتي المماس والعمودي على المماس للمنحنى $f(x) = (x-1)^{\sqrt{2}}$ ، عند النقطة $(1,0)$.

10) أوجد معادلتي المماس والعمودي على المماس للمنحنى $y = \dfrac{(x+2)^3}{(x-1)^{\frac{1}{3}}}$ ، عند النقطة $(0,-8)$.

6.4 المشتقة الأولى للدوال المثلثية

The First Derivative of Trigonometric Functions

في هذا البند نحاول إيجاد صيغ المشتقة الأولى للدوال المثلثية، وحيث أن المشتقة الأولى معرّفة بالنهاية، فعلى الطالب مراجعة بعض النظريات التي تخص نهاية الدوال المثلثية في الفصل الثالث.

نذكر القارىء بأن الزاوية x أو θ مقيسة بالتقدير الدائري، وأن نطاق $\sin x$ ونطاق $\cos x$ هو كل الأعداد الحقيقية.

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x \tag{1}$$

البرهان

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\sin x &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin x\cos\Delta x+\cos x\sin\Delta x-\sin x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\left[\sin x\frac{\cos\Delta x-1}{\Delta x}+\cos x\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\right] \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\sin x\frac{\cos\Delta x-1}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\cos x\frac{\sin\Delta x}{\Delta x} \\
&= \sin x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos\Delta x-1}{\Delta x}+\cos x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x} \\
&= \sin x.0+\cos x.1=\cos x
\end{aligned}$$

استخدمنا في هذا البرهان القانون $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$

ملاحظة 1

لقد برهنا على أن الدالة القابلة للاشتقاق، تكون متصلة، وبذلك فإن الدالة $\sin x$ تكون دالة متصلة عند كل عدد حقيقي x.

بصفة عامة:

(2) إذا كان $y = \sin u$، فإن:

$$\frac{d}{dx}\sin u = \cos u \frac{du}{dx}$$

البرهان

باستخدام قاعدة السلسلة، نعلم أن:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} = \cos x.\frac{du}{dx}$$

إذن

$$\frac{dy}{dx} = \cos x \frac{du}{dx}$$

مثــال 16

أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كان $y = \sin\left(\frac{x+1}{x^2-3}\right)$.

الحــل

نفترض أن $u = \frac{x+1}{x^2-3}$، ومن ذلك نجد أن:

$$\frac{du}{dx} = \frac{(x^2-3) - 2x(x+1)}{(x^2-3)^2} = \frac{-x^2-2x-3}{(x^2-3)^2}$$

إذن

$$\frac{du}{dx}\cos u \frac{du}{dx} = \cos u.\frac{-x^2-2x-3}{(x^2-3)^2}$$

$$= \cos\left(\frac{x+1}{x^2-3}\right)\frac{-x^2-2x-3}{\left(x^2-3\right)^2}$$

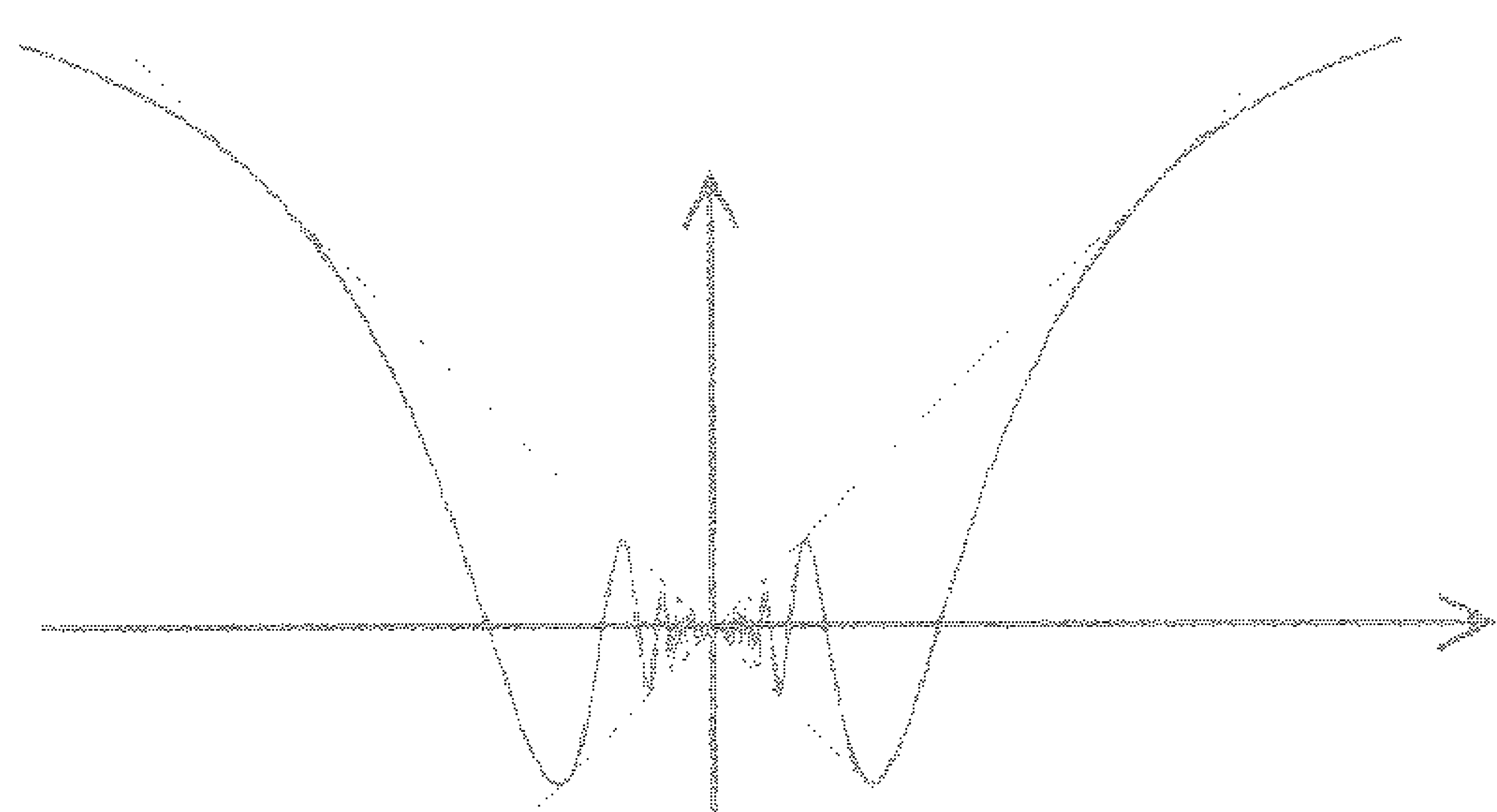
$$= \frac{-x^2-2x-3}{\left(x^2-3\right)^2}\cos\left(\frac{x+1}{x^2-3}\right)$$

مثال 17

إذا كان $f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & ; \quad x \neq 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \end{cases}$ ناقش اتصالية الدالة f، وقابليتها للاشتقاق.

الحل

من الواضح أن $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$، وبالتالي تكون الدالة f متصلة عند $x = 0$.



إذا كان $x \neq 0$، فإن:

$$f'(x) = \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$$

لاحظ أن

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\sin\frac{1}{h}$$

وهذه النهاية غير موجودة.

هذا يعني أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند $x = 0$.

يوضح هذا المثال أن الاتصالية عند نقطة لا تؤدي إلى قابلية الاشتقاق عند تلك النقطة.

(3) إذا كان $y = \cos x$، فإن: $\dfrac{dy}{dx} = -\sin x$

البرهان

من حساب المثلثات، نعلم أن:

$$\cos x = \sin(\pi/2 - x)$$

إذن

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\cos(x) &= \frac{d}{dx}\sin(\pi/2 - x) = \cos(\pi/2 - x)(-1) \\ &= -\cos(\pi/2 - x) = -\sin x \end{aligned}$$

ملاحظة 2

كما في حالة $\sin x$، نجد أن $\cos x$ دالة متصلة، لأنها قابلة للاشتقاق عند كل عدد حقيقي x.

بصفة عامة:

(4) إذا كان $y = \cos u$، فإن:

$$\frac{dy}{dx} = -\sin u \frac{du}{dx}$$

حيث u دالة في x.

البرهان

باستخدام قاعدة السلسلة، نعلم أن:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}=-\sin x.\frac{du}{dx}$$

مثـال 18

أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كان $y=\cos\sqrt{x}$.

الحـل

نفترض أن $u=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ ومن ذلك نجد أن:

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

إذن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}=-\sin u.\frac{1}{2\sqrt{x}}=-\sin\sqrt{x}.\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{x}}.\sin\sqrt{x}=-\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

وحيث أن باقي الدوال المثلثية تعطى بدلالة $\sin x$ و $\cos x$، من السهل على الطالب البرهنة على القوانين التالية:

$$\frac{d}{dx}\tan x=\sec^2 x \tag{5}$$

$$\frac{d}{dx}\cot x=-\csc^2 x \tag{6}$$

$$\frac{d}{dx}\sec x=\sec x\tan x \tag{7}$$

$$\frac{d}{dx}\csc x=-\csc x\cot x \tag{8}$$

البرهان

5) من حساب المثلثات، نعلم أن: $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

نستخدم الآن قانون القسمة لإيجاد $\dfrac{d}{dx}\tan x$.

6) من حساب المثلثات، نعلم أن:

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

نستخدم الآن قانون القسمة لإيجاد $\dfrac{d}{dx}\cot x$.

7) من حساب المثلثات، نعلم أن:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

نستخدم الآن قانون القسمة لإيجاد $\dfrac{d}{dx}\sec x$.

8) من حساب المثلثات، نعلم أن:

$$\csc x = \frac{1}{\sin x}$$

نستخدم الآن قانون القسمة لإيجاد $\dfrac{d}{dx}\csc x$.

تمارين 6.4

أوجد المشتقة الأولى للدوال التالية:

1) $y = \sin(3x)$

2) $y = \cos(x-3)$

3) $y = \sin(x^2 - 2x + 6)$

4) $y = \sin^2 x + \cos^2 x$

5) $y = \sin(x^3)$

6) $y = \sin^2 x \cos^3 x$

7) $y = \tan x \cot x$

8) $y = \sqrt{\sin x + \tan x}$

9) $y = \dfrac{1 + \sec x}{1 - \sec x}$

10) $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{\tan x}$

11) $y = \dfrac{\sin x}{x}$

في التمارين 12 إلى 15، أوجد النهاية المذكورة.

12) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(x^2) - 1}{x^4}$

13) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2(3x)}{4x}$

14) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x/2)}{\sin(x/5)}$

15) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(2x) - 1}{x}$

16) برهن على القوانين من 5 إلى 8.

17) إذا كانت $f(x) = \sqrt{x} \cot x$، أوجد $f'(x)$

18) إذا كانت $f(x) = \cos(\tan x)$، أوجد $f'(x)$.

19) إذا كانت $f(x) = \dfrac{1 + \tan^3(3x^2 - 4)}{x^2 \sin x}$، أوجد $f'(x)$.

20) إذا كانت $f(x) = \sin nx \sin^n x$، أوجد $f'(x)$.

7.4 الاشتقاق الضمني (Implicit Differentiation)

تعطى الدالة ـ في معظم المسائل التي قابلناها ـ في صورة صريحة؛ أي y أو $f(x)$ بدلالة x، ولكن في بعض الأحيان تعطى المعادلة في صورة ضمنية، مثل:

$$x^2 + y^2 = 6xy^4 \quad (1)$$

$$xy = 1 \quad (2)$$

$$\frac{x+y}{x^2-y^2} = 16y^5 \quad (3)$$

لإيجاد المشتقة الأولى لمثل هذه الدوال تؤخذ المشتقة الأولى لكل حد من حدود المعادلة بالنسبة للمتغير x.

مثـــال 19

أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كان $x^2 + y^2 = y + y^4$.

الحـــل

بأخذ المشتقة الأولى لكل حد، نجد أن:

$$\frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}y^2 = \frac{d}{dx}y + \frac{d}{dx}y^4$$

إذن

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} + 4y^3\frac{dy}{dx}$$

نضع كل الحدود التي تحتوي على $\frac{dy}{dx}$ في طرف، وبقية الحدود في الطرف الآخر:

$$2x = (1 + 4y^3 - 2y)\frac{dy}{dx}$$

ومن ذلك، نجد أن:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{1 + 4y^3 - 2y}$$

مثـــال 20

أوجد معادلة المماس للمنحنى $x^4 + y^4 = 17$ عند النقطة $(2,1)$.

الحـــل

أولاً نجد $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{d}{dx}x^4 + \frac{d}{dx}y^4 = \frac{d}{dx}17$$

إذن

$$4x^3 + 4y^3\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^3}{y^3}$$

إذن ميل المماس عند النقطة $(2,1)$ هو: -8

ومعادلة المماس هي: $y - 1 = -8(x-2)$ أو $8x + y = 17$

ملاحظة

الرمز $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x,y)}$ يعني المشتقة الأولى $\frac{dy}{dx}$ عند النقطة (x,y).

تمارين 7.4

أوجد المشتقة الأولى للدوال التالية:

1) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$

2) $x^{-1}+y^{-1}=1$

3) $(4x^2y^2)^{\frac{1}{5}}=1$

4) $\cos\ (x^2+y^2)=2x$

5) $\dfrac{\sin\ x}{\cos\ y}=\sin\ (x-y)$

6) $\dfrac{x}{y}+\dfrac{x^2}{y^2}=1$

7) $y=\sin\ x\cos\ y$

8) $\sqrt{yx^2+xy^2}=0$

9) $(x+y)^{\frac{1}{2}}=(x^2+y)^{\frac{1}{3}}$

10) $(x+y)^2=x^2+y^2$

11) $x=y\sqrt{1-y^2}$

12) $\sqrt{1-xy}+3y=4$

13) $2xy+3y^2=2$

14) $xy-x^3+y^2=0$

15) $\dfrac{x^2}{y^3}-x=c$ حيث c عدد ثابت.

8.4 المشتقات من رتب أعلى (Higher-Order Derivatives)

إذا كانت $y = f(x)$ دالة قابلة للاشتقاق، فإن $f'(x) = \frac{dy}{dx} = y'$ تكون دالة في x أيضاً، وهذه الدالة في x قد تكون أو لا تكون قابلة للاشتقاق. إذا كانت $f'(x)$ قابلة للاشتقاق، فإن المشتقة الأولى للدالة f' هي المشتقة الثانية للدالة f ويرمز لها بالرمز f''.

هناك رموز أخرى مستعملة للدلالة على المشتقة الثانية، منها:

$$f''(x) = (f'(x))' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

بالمثل f'' دالة في x قد تكون أو لا تكون قابلة للاشتقاق.

إذا كانت $f''(x)$ قابلة للاشتقاق، فإن المشتقة الأولى للدالة f'' تسمى المشتقة الثالثة للدالة f ويرمز لها بالرمز

$$f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3} = y'''$$

نستطيع المواصلة بنفس الطريقة، ما دامت المشتقة الناتجة قابلة للاشتقاق، ونرمز لهذه المشتقات بالرموز $f^{(4)}, f^{(5)}, f^{(6)}, ...$

حيث أن
$$f^{(4)}(x) = \frac{d^4y}{dx^4} = y^{(4)}, ..., f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n} = y^{(n)}, ...$$

مثال 21

إذا كان $f(x) = x^3$، فإن:

$$f'''(x) = 6, f''(x) = 6x, f'(x) = 3x^2$$

$f^{(n)}(x) = 0$ لكل $n \geq 4$.

مثال 22

إذا كان $f(x) = \frac{1}{x}$، فإن:

$$f^{(4)}(x)=\frac{24}{x^5}, f'''(x)=-\frac{6}{x^4}, f''(x)=\frac{2}{x^3}, f'(x)=-\frac{1}{x^2}$$

وبصفة عامة في هذه الحالة

$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$ لكل $n \geq 1$.

مثال 23

إذا كان $f(x)=\sin x$، فإن:

$$f^{(4)}(x)=\sin\ x \ ,\ f'''(x)=-\cos\ x \ ,\ f''=-\sin\ x \ ,\ f'(x)=\cos x$$

تمارين 8.4

أوجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ ، $\frac{d^3y}{dx^3}$ في المسائل التالية:

1) $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$

2) $y=\sqrt{1-x^2}$

3) $y=\sqrt{x^2+1}$

4) $y=\cos\sqrt{x}$

5) $y=\sin\ x^2$

6) $y=x^3$

7) $y=\frac{x+1}{x-1}$

8) $y=ax^2+bx+c$

9) $y=ax^3+bx^2+cx+d$

10) يتحرك جسم بحيث يُعطى موضعه بعد زمن t بالمعادلة:

$$x=2t^3-4t^2+2t+3$$

أوجد:

أ) موضعه الابتدائي.

ب) سرعته الابتدائية.

ج) عجلة الجسم الابتدائية.

د) سرعته بعد 3 ثوان.

11) استخدم المشتقات من رتب عليا لبرهنة أن

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + .. + x^n$$

[إرشاد: ضع $(1+x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_nx^n$ وأوجد $a_0, a_1, a_2, ..., a^n$]

12) أوجد المشتقة التي رتبتها n للدالة $f(x) = \mathbf{cos}\ \ mx\ \mathbf{sin}\ \ kx$.

13) إذا كان $y = (a+bx)^n$، أوجد صيغة للمشتقة من الرتبة n.

14) إذا كان $y = \dfrac{1}{x}$ حيث $x \neq 0$، أوجد صيغة للمشتقة من الرتبة n.

15) أوجد $f'(x)$ و $f''(x)$ للدالة

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ; \quad x \leq 1 \\ 2x-1 & ; \quad x > 1 \end{cases}$$

تمارين على الفصل الرابع

في التمارين من 1 إلى 14، أوجد $\frac{dy}{dx}$:

1) $y = 2x^3 - 3x^2 + 2$

2) $y = x^6 - \sqrt[3]{x}$

3) $y = (2x^2 + 1)\sqrt{x+1}$

4) $y = (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}(x^3 - 2)^{\frac{1}{3}}$

5) $y = \frac{x+1}{x-2}$

6) $y = \sqrt[3]{\frac{x-2}{x+3}}$

7) $y = \frac{2}{x - \sqrt{x^2+1}}$

8) $y = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$

9) $y = \sqrt{x - \sqrt{1-x}}$

10) $y = \sin^2 x^2$

11) $y = \sqrt{1 + \cos\ x}$

12) $y = \cos\sqrt{1+x}$

13) $y = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

14) $y = \frac{(x^3-1)^{\frac{2}{3}}}{(x^4+3)^{\frac{1}{2}}}$

في التمارين من 15 إلى 20، أوجد معادلة المماس للمنحنى المعطى عند النقطة المعطاة:

15) $y = x^3 - x + 4$ عند $(1,4)$

16) $xy^2 - yx^2 = 0$ عند $(1,1)$

17) $y = \cos\sqrt{x}$ عند $(\pi^2/9, 1/2)$

18) $y = \tan x$ عند $(\pi/4, 1)$

19) $y = \frac{\sqrt{x^2+9}}{x^2-6}$ عند $(4, 1/2)$

20) $y = \frac{1}{1+x}$ عند $(1, 1/2)$

في التمارين من 21 إلى 25، أوجد معادلة العمودي على المماس للمنحنى المعطى، عند النقطة المعطاة.

21) $y = x^2 - 4x + 2$ عند $(1, 1/2)$

22) $y = \dfrac{4}{x+1}$ عند $(2, 4/3)$

23) $y = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)\left(1 + \dfrac{3}{x^2}\right)$ عند $(1, 0)$

24) $y = \dfrac{x}{x - \sqrt{x}}$ عند $(4, 2)$

25) $y = \dfrac{1 + \dfrac{1}{x}}{1 - \dfrac{1}{x}}$ عند $(1/2, 3)$

في التمارين من 26 إلى 30، أوجد المشتقة الأولى والمشتقة الثانية للمعادلة المعطاة.

26) $y = \sin x^2$

27) $y = 8x^{\frac{3}{2}} - 9x^{\frac{4}{3}}$

28) $y = (x-1)(x+1)$

29) $y = x^2 \sin (3x)$

30) $y = (x^2 + 3)\sin (x/3)$

في التمارين من 31 إلى 35، أوجد المشتقة الأولى والمشتقة الثانية للمعادلة المعطاة.

31) $x^4 + 4x^2y^2 = 25$

32) $y \tan\ x^2 - xy^3 = 15$

33) $\sin\ y = \cos\ x$

34) $y + 1 = x \cos\ y$

35) $5x^2 + 8y^3 = 16\sqrt{x+1}$.

36) أوجد النقطة على بيان منحنى الدالة $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ التي يكون عندها المماس عمودياً على المستقيم $4y + x = 1$.

37) أوجد النقطة على بيان منحنى الدالة $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ التي يكون عندها العمودي على المماس موازياً للمستقيم $y + x = 1$.

38) أوجد النقطة على بيان منحنى الدالة $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$ التي يكون عندها المماس أفقياً.

39) أوجد النقطة على بيان منحنى الدالة $f(x) = \cos x$، حيث $0 \leq x \leq \pi/2$، التي يكون عندها المماس عمودياً على المستقيم $2x - y + 4 = 0$.

40) إذا كانت $y = \dfrac{1}{1-x}$، أوجد صيغة لإيجاد $f^{(n)}(x)$، حيث إن n عدد صحيح موجب.

الفصل الخامس

تطبيقات على المشتقات

Applications of Derivatives

في هذا الفصل، نستخدم الاشتقاق كأداة لحل بعض المسائل الفيزيائية مثل تعيين القيم القصوى لدالة، ومعرفة تقعّر بيان الدالة، ونقط الانقلاب حتى يساعدنا ذلك في تخطيط سريع لبيان الدالة.

5.1 نظرية رول ونظرية القيمة الوسطى

Rolle's Theorem & Mean Value Theorem

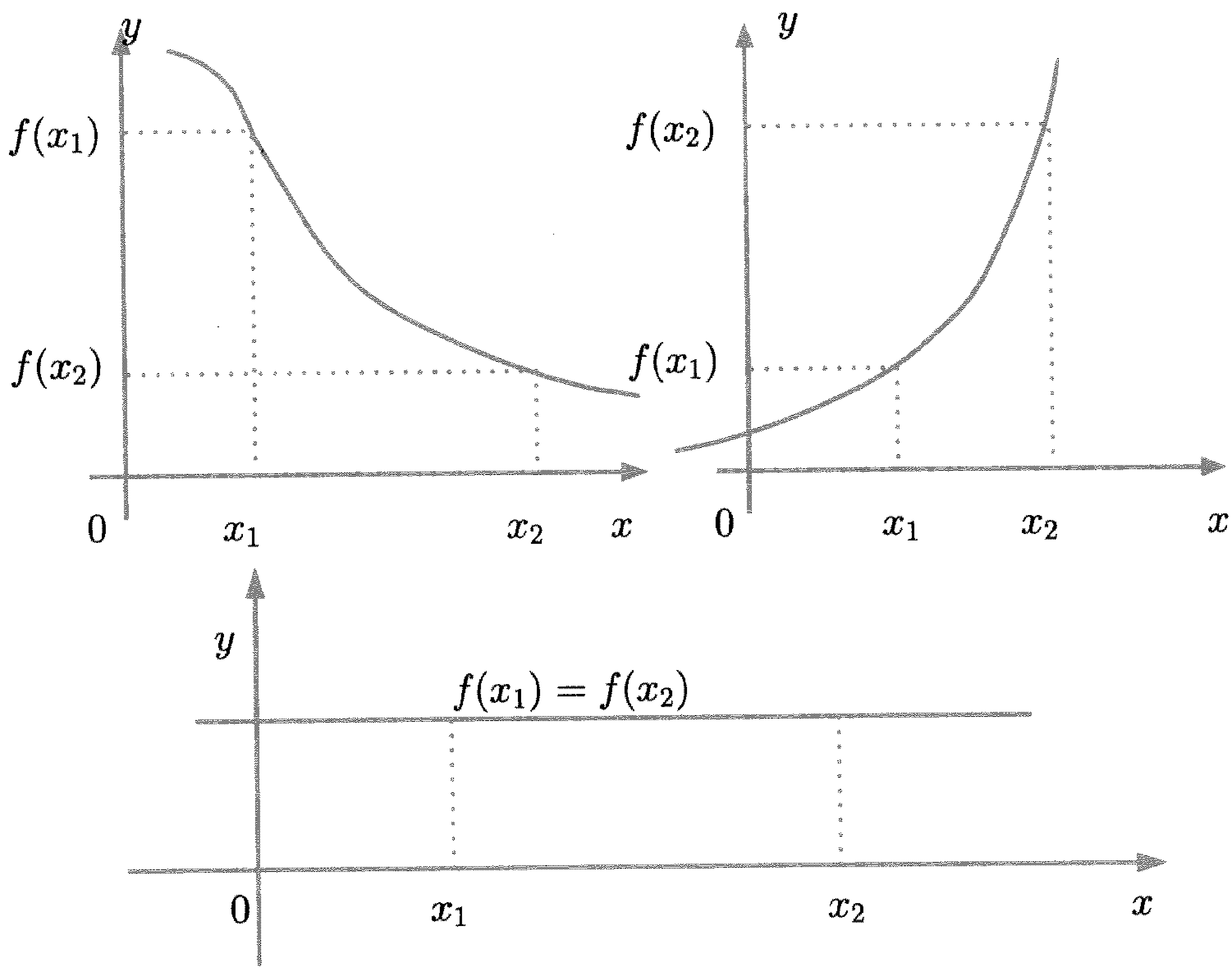
تعريف 1.5:

لنفرض أن الدالة f معرّفة على الفترة $[a,b]$ و x_1، x_2 في $[a,b]$:

1) الدالة f تزايدية على الفترة $[a,b]$، إذا كان $x_1 < x_2$ يؤدي إلى أن $f(x_1) < f(x_2)$.

2) الدالة f تناقصية على الفترة $[a,b]$، إذا كان $x_1 < x_2$ يؤدي إلى أن $f(x_1) > f(x_2)$.

3) الدالة f ثابتة على الفترة $[a,b]$، إذا كان $f(x_1) = f(x_2)$ لكل x_1، x_2 في الفترة $[a,b]$.



الشكل 1.5

نلاحظ من البيان أن بيان الدالة يصعد إلى أعلى، كما زاد x إذا كانت الدالة f تزايدية، ويهبط إلى أسفل كلما زاد x إذا كانت الدالة f تناقصية، ويبقى ثابتاً إذا كانت الدالة ثابتة.

نظرية 1 (نظرية رول Rolle's Theorem):

إذا كانت f قابلة للاشتقاق على (a,b) ومتصلة على $[a,b]$، وإذا كان $f(a) = f(b)$، فإن هناك على الأقل عنصراً واحداً c في (a,b)؛ حيث أن $f'(c) = 0$.

البرهان

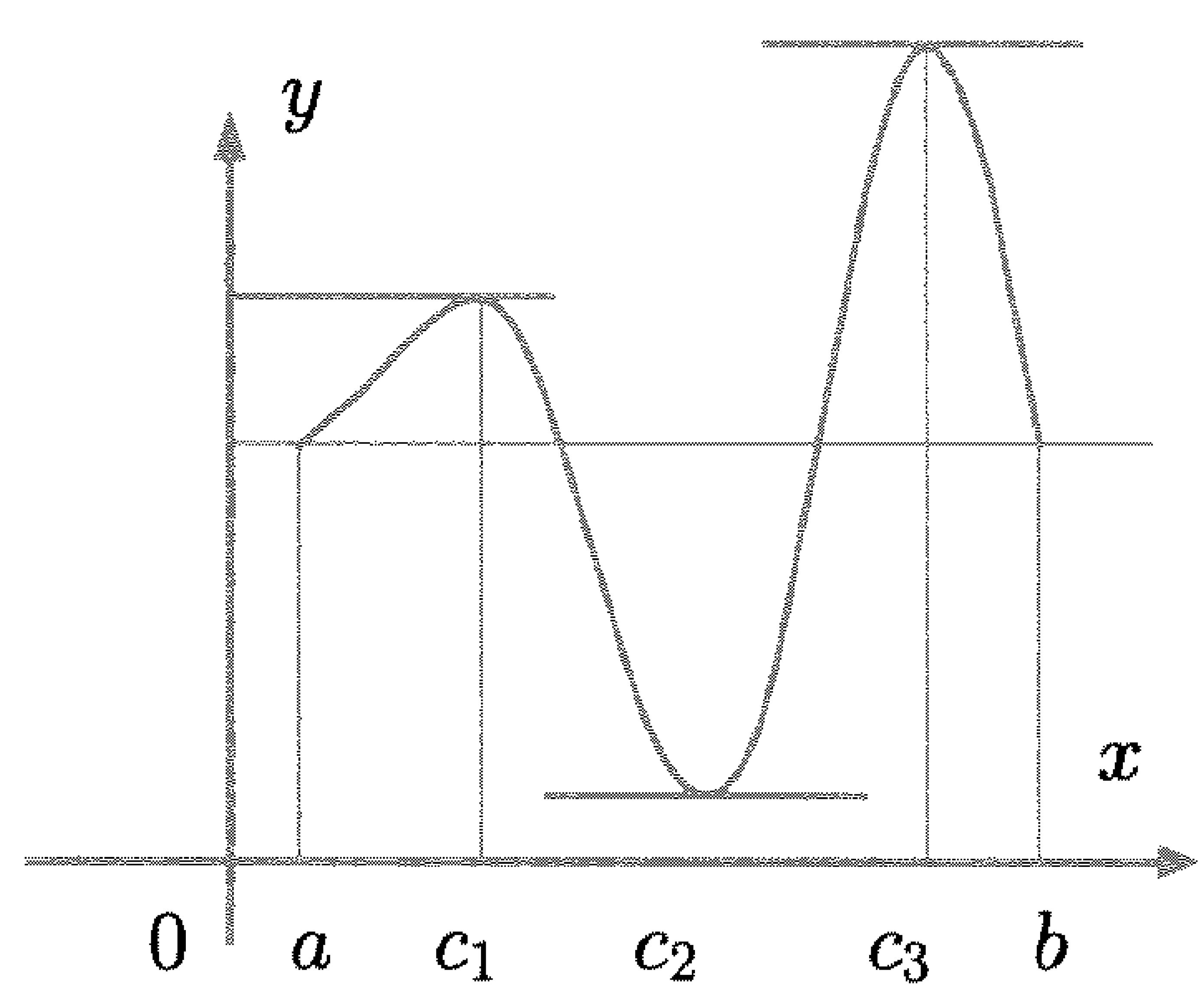
إذا كان $f(x)=f(a)=f(b)$ لكل $x\in(a,b)$.

فإن الدالة f تكون دالة ثابتة، وبالتالي فإن $f'(x)=0$ لكل $x\in(a,b)$.

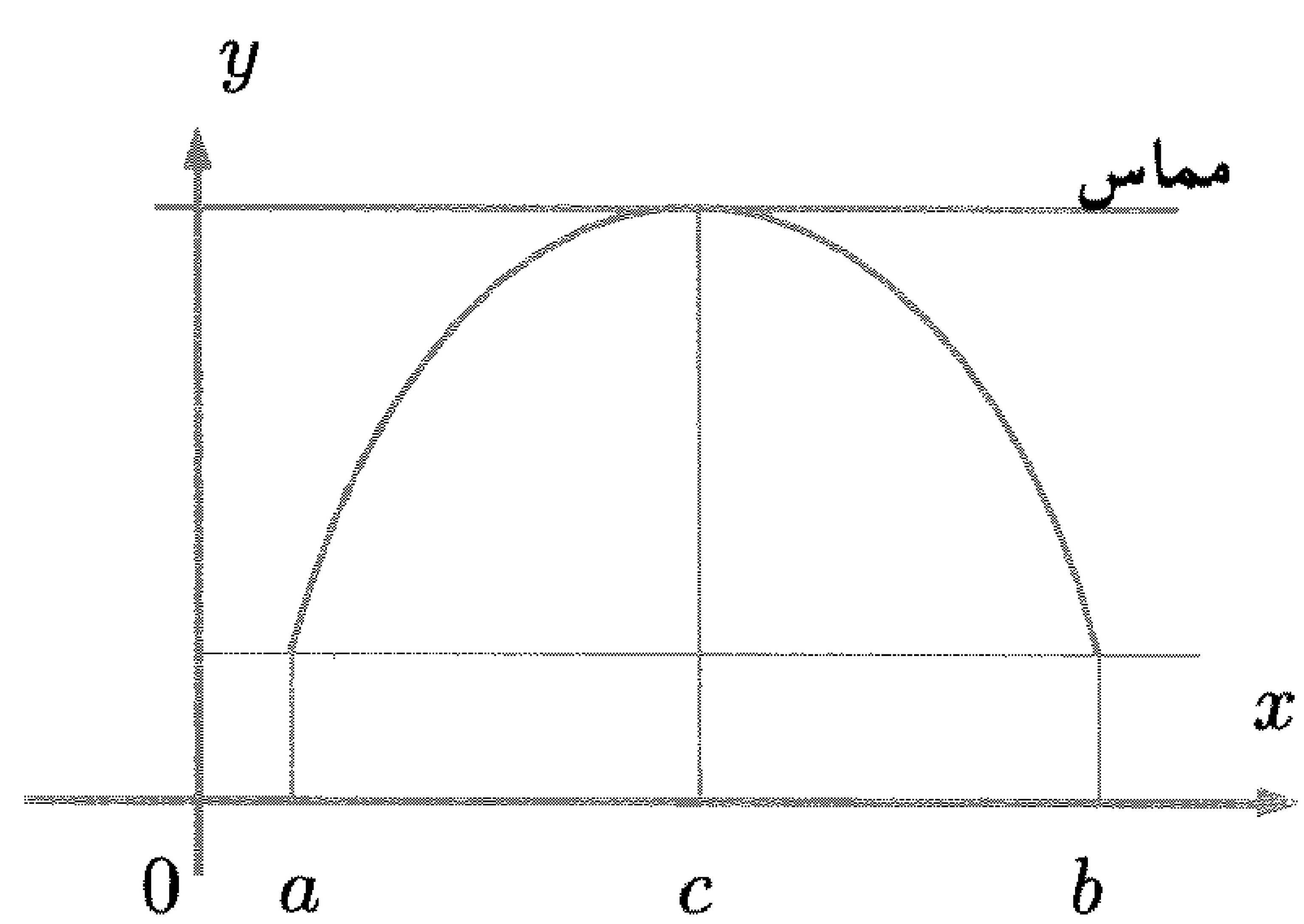
إذن أي عدد بين a وb يقوم بهذا العمل.

إذا كان هناك $x\in(a,b)$؛ حيث أن $f(x)\neq f(a)$، فإن:

$f(x)>f(a)$ أو $f(x)<f(a)$، لنأخذ الحالة $f(x)>f(a)$ (الحالة $f(x)<f(a)$ تقود إلى النتيجة نفسها).



الشكل 3.5



الشكل 2.5

هناك عدد c في (a,b) يحقق ما يلي $f(x)\le f(c)$ لكل x في (a,b) لأن الدالة متصلة، ولهذا تكون لها قيمة عظمى.

إذن $f(x)-f(c)\le 0$

إذا كان c على يمين العدد x، فإن $x-c<0$، وبذلك فإن:

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\ge 0$$

ومن ذلك...

$$f'(c)=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\ge 0 \qquad (1)$$

وإذا كان c على يسار العدد x، فإن $x-c>0$، وبذلك فإن:

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\leq 0$$

ومن ذلك...

$$f'(c)=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\leq 0 \qquad (2)$$

من (1) و(2) نستنتج أن $f'(c)=0$.

تقول هذه النظرية إنه إذا كانت الدالة f متصلة على فترة مغلقة وقابلة للاشتقاق على تلك الفترة المفتوحة، وقيمة الدالة عند بداية الفترة تساوي قيمة الدالة عند نهاية الفترة، فإنه يوجد على الأقل عنصر واحد c بين a وb، ويكون المماس عند النقطة $(c,f(c))$ موازياً لمحور السينات.

قد يكون هناك أكثر من c بين a وb، تكون عنده المشتقة الأولى صفراً.

مثال 1

أوجد العدد c في الفترة $[-2,2]$، الذي يحقق نظرية رول للدالة $f(x)=x^3-4x$.

الحل

حيث أن $f(-2)=f(2)$، والدالة متصلة على $[-2,2]$، وقابلة للاشتقاق على $(-2,2)$، فإنه يوجد c بين $-2,2$ حيث أن $f'(c)=0$.

$f'(x)=3x^2-4$

$f'(c)=3c^2-4$

$3c^2-4=0$

ومن ذلك $c=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$

$c=\frac{2}{\sqrt{3}}$ و$c=-\frac{2}{\sqrt{3}}$ يحققان نظرية رول لهذه الدالة.

نظرية 2 (نظرية القيمة الوسطى) Mean Value Theorem:

إذا كانت f قابلة للاشتقاق على (a,b) ومتصلة على $[a,b]$، فإن هناك على الأقل عنصراً واحداً c في (a,b)، حيث أن:

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

البرهان

نعرّف الدالة

$$g(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

نلاحظ أن g تحقق شروط نظرية رول، حيث أن:

$$g'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

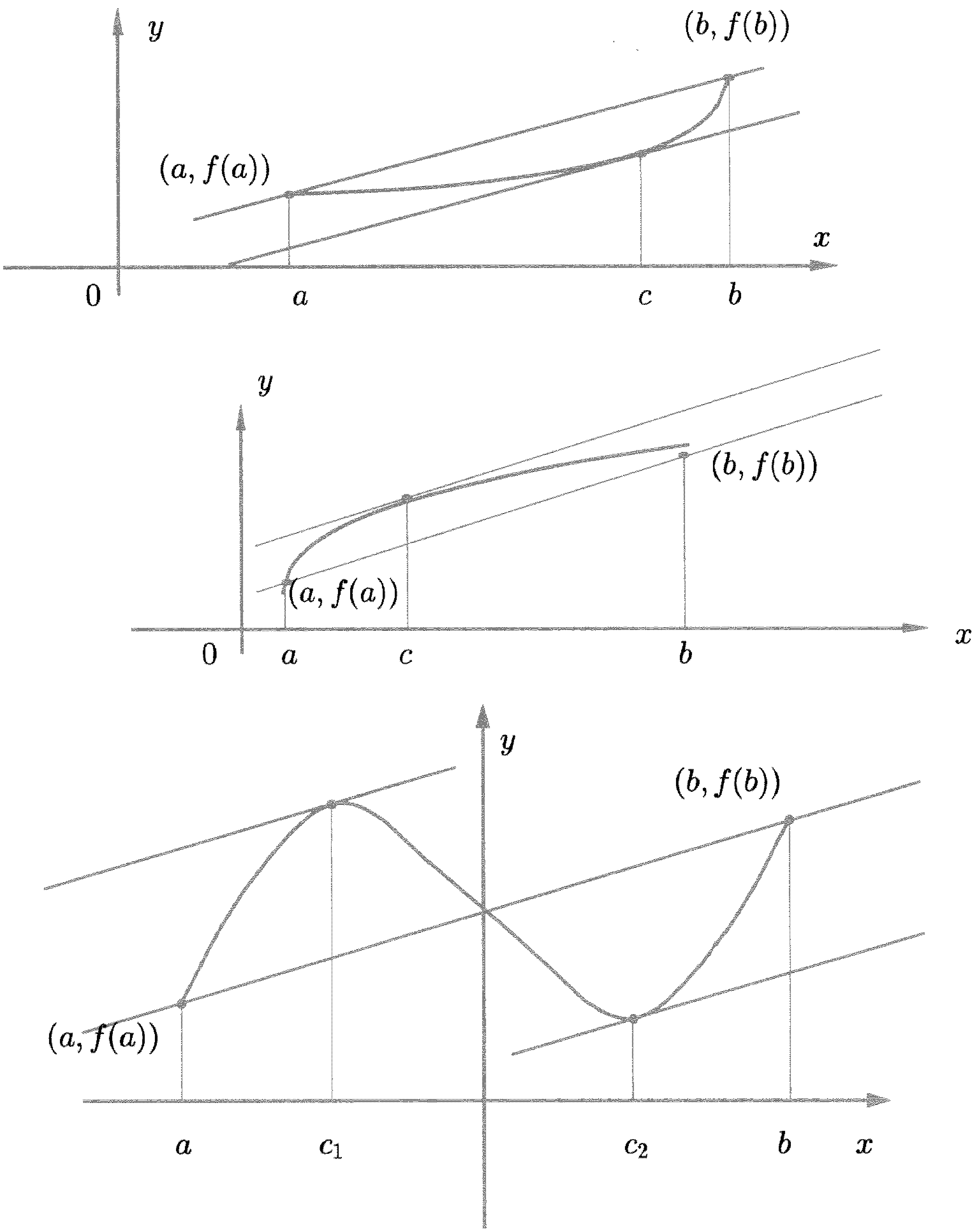
إذن هناك $c\in(a,b)$؛ حيث أن $g'(c)=0$

$$0=g'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

ومن ذلك

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

توضح هذه النظرية أن لا ضرورة لأن تكون $f(a)=f(b)$ لوجود عدد c بين a وb يكون المماس عند النقطة $(c,f(c))$ موازياً للخط الواصل بين النقطتين $(a,f(a))$ و $(b,f(b))$.



الشكل 4.5