جامعة الانبار
كلية علوم الحاسوب وتكنولوجيا المعلومات
قسم أنظمة شبكات الحاسوب

رياضيات ١

Mathematics 1

تكملة لقواعد الاشتقاق

Properties of Derivative , Some laws of derivatives

المرحلة الأولى – الفصل الاول

م.م. عدي عبد هزام

البرهان

لاحظ أن $g(b) - g(a) \neq 0$، لأنه إذا كان $g(b) - g(a) = 0$، فإن $g(b) = g(a)$ وبذلك يمكن تطبيق نظرية رول على الدالة g ويكون هناك على الأقل عدد واحد c في (a, b) حيث أن $g'(c) = 0$ وهذا يناقض الفرض.

لنفرض أن

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a))$$

من الملاحظ أن h دالة متصلة على $[a, b]$، وأن:

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

هذا يعني أن h قابلة للاشتقاق على (a, b).

عند التعويض المباشر نجد أن:

$$h(a) = h(b) = 0$$

وبذلك يمكن تطبيق نظرية رول على الدالة h، وهذا يوصلنا إلى الاستنتاج بأن هناك على الأقل عدد c في (a, b)، حيث أن:

$$0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c)$$

وهذا يعني أن:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{f(b) - g(a)}$$

تمارين 1.5

في التمارين من 1 إلى 5، تحقق من فروض نظرية رول في كل حالة، ثم أوجد العدد (أو الأعداد) c في الفترة المذكورة، حيث يكون $f'(c) = 0$

1) $f(x) = x^2 - 3x$ على $[0, 3]$

2) $f(x) = \sqrt{x}(x^3 - 1)$ على $[0, 1]$

3) $f(x) = \sin x$ على $[0, 4\pi]$

4) $f(x) = \sqrt{1 - \cos\ x}$ على $[-\pi/2, \pi/2]$

5) $f(x) = x^{\frac{4}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}}$ على $[0, 3]$

في التمارين من 6 إلى 11، تحقق من فروض نظرية القيمة الوسطى في كل حالة، ثم أوجد العدد (أو الأعداد) c في الفترة المذكورة، حيث يكون:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

6) $f(x) = 2x^3$ على $[0, 2]$

7) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x + 1}$ على $[0, 3]$

8) $f(x) = \sqrt{x + 1}$ على $[3, 8]$

9) $f(x) = x \cos\ x$ على $(\pi/2, 5\pi/2]$

10) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x + 4}$ على $[-1, 3]$

11) $f(x) = \cos\ (2x) - 2\cos^2 x$ على $[-\pi/2, \pi/4]$.

12) أوضح لماذا لا يوجد عدد c في $(-1, 3)$، يحقق استنتاج نظرية رول للدالة:

$$f(x) = |x - 1| - 2$$

13) أوضح لماذا لا يوجد عدد c في $(-1,2)$، يحقق استنتاج نظرية القيمة الوسطى للدالة.

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

14) إذا كانت $f(x)=dx^2+ex+h$ حيث d,e,h ثوابت، أوضح أن هناك c يحقق فروض نظرية القيمة الوسطى على الفترة (a,b) حيث $c=\dfrac{a+b}{2}$.

في التمارين من 15 إلى 19 تحقق من شروط نظرية القيمة الوسطى المعممة وطبّقها على الدوال المعطاة وعلى الفترة المعطاة، واذكر السبب في حالة عدم إمكانية تطبيقها:

15) $f(x)=x^2$ ، $g(x)=x$ ، $[1,2]$.

16) $f(x)=x+1$ ، $g(x)=|x|^{\frac{3}{2}}$ ، $[-1,1]$.

17) $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ ، $g(x)=\dfrac{x}{x-1}$ ، $[-3,-2]$.

18) $f(x)=3x^2-2x+4$ ، $g(x)=x^3+2x$ ، $[-1,1]$.

19) $f(x)=x^2+3x-1$ ، $g(x)=x^3+5x+4$ ، $[0,2]$.

20) إذا كانت f و g دالتين قابلتين للاشتقاق على $[a,b]$، وإذا كان $f(a)=g(a)$ ، $f(b)=g(b)$، برهن أن هناك عدد c في (a,b) حيث أن $f'(c)=g'(c)$.

2.5 التزايد والتناقص (Increasing and Decreasing)

نظرية 3

نفرض أن f دالة قابلة للاشتقاق على (a,b) ومتصلة على $[a,b]$:

أ) إذا كانت $f'(x)>0$ لكل $x\in(a,b)$، فإن f دالة تزايدية على $[a,b]$.

ب) إذا كانت $f'(x)<0$ لكل $x\in(a,b)$، فإن f دالة تناقصية على $[a,b]$.

البرهان

أ) لنفرض أن $x_1,x_2\in[a,b]$ حيث $x_1<x_2$.

الدالة f تحقق شروط نظرية القيمة الوسطى على الفترة $[x_1,x_2]$.

إذن يوجد c بين x_1,x_2 حيث أن

$$f'(c)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\Longrightarrow f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)$$

وحيث أن $f'(c)>0$ ومن الفرض $x_1<x_2$، فإن:

$f(x_2)-f(x_1)>0$ ، ومن ذلك $f(x_2)>f(x_1)$

إذن الدالة f تزايدية على $[a,b]$.

ب) وباتباع الطريقة نفسها مع استعمال الافتراض $f'(c)<0$،تتم البرهنة على الجزء (ب) من النظرية.

مثال 3

أوجد الفترات التي تكون عليها $f(x)=x^4-16x^2$ تزايدية، وكذلك الفترات التي تكون عليها الدالة نفسها تناقصية.

الحـل

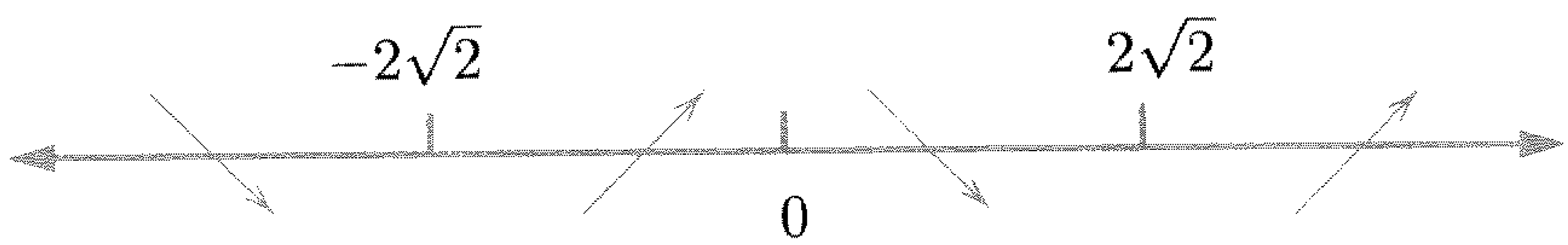
$$f'(x) = 4x^3 - 32x$$

نساوي المشتقة الأولى بالصفر

$$4x(x^2 - 8) = 0$$

ومن ذلك. . .

$$x = 0 \text{ أو } x = \pm 2\sqrt{2}$$



على الفترة $(-\infty, -2\sqrt{2})$ نجد أن $f'(x) < 0$، وذلك بأخذ أي قيمة في $(-\infty, -2\sqrt{2})$ وتعويضها في $f'(x)$، فعلى سبيل المثال

$$f'(-4) = 4(-4)^3 - 32(-4) = -128 < 0$$

وبذلك نستنتج أن f دالة تناقصية على $(-\infty, -2\sqrt{2})$.

على الفترة $(-2\sqrt{2}, 0)$ نجد أن $f'(x) > 0$، فعلى سبيل المثال

$$f'(-1) = 4(-1)^3 = 32(-1) = 28 > 0$$

ومن ذلك نستنتج أن f دالة تزايدية على $(-2\sqrt{2}, 0)$.

على الفترة $(0, 2\sqrt{2})$، نجد أن $f'(x) < 0$، وبذلك تكون الدالة f تناقصية على $(0, 2\sqrt{2})$.

على الفترة $(2\sqrt{2}, \infty)$ نجد أن $f'(x) > 0$، وبذلك تكون الدالة f تزايدية على $(2\sqrt{2}, \infty)$.

ملاحظة

نعرف أنه إذا كانت الدالة ثابتة، فإن تفاضلها يساوي صفراً، ولكن هل العكس

صحيحاً؟، أي إذا كانت f قابلة للاشتقاق على (a,b) و$f'(x)=0$ لكل $x\in(a,b)$، فإن f تكون دالة ثابتة على (a,b).

لنفرض أن $x_1,x_2\in(a,b)$ حيث $x_1\neq x_2$

إذن يوجد $c\in(x_1,x_2)$؛ حيث أن

$$\frac{f(x)_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)=0$$

هذا يؤدي إلى أن $f(x_1)=f(x_2)$ لكل $x_1,x_2\in(a,b)$

إذن f دالة ثابتة.

تمارين 2.5

في التمارين من 1 إلى 9، أوجد الفترات التي تكون عليها الدالة المعطاة تزايدية، والفترات التي تكون عليها الدالة نفسها تناقصية.

1) $f(x)=x^2+x-20$

2) $f(x)=(x-2)^{\frac{2}{3}}$

3) $f(x)=x-\dfrac{4}{x^2}$

4) $g(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$

5) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+2x+2}$

6) $g(x)=\sqrt{x}+\dfrac{4}{x}$

7) $g(x)=1-\dfrac{4}{x^2}$

8) $f(x)=x^{\frac{7}{5}}-8x^{\frac{3}{5}}$

9) $f(x)=\sin\ x+\cos\ x$

10) لنفرض أن $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

أ) أوضح أن الدالة تناقصية على نطاقها.

ب) أوضح أنه لا توجد نقطة على بيان الدالة f، بحيث يكون $f'(x)=0$.

ج) أوجد نقاط التقاطع مع محور السينات ومع محور الصادات.

د) أعط بياناً تخطيطياً للدالة f.

11) أوضح أن الدالة $f(x)=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}$ تكون تناقصية على الفترة $(-1,1)$.

12) أوجد الفترات التي تكون عليها الدالة $f(x)=|x^2-1|+1$ تناقصية والفترات التي تكون عليها تزايدية.

13) أوضح أن $\sin\ x<x$ لكل $0<x$.

[إرشاد: استخدم الدالة $f(x)=x-\sin\ x$].

14) أوجد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة

$$f(x)=\tan x-x(x+2)$$

15) أوضح أن $\cos x>1-\dfrac{x^2}{2}$ لكل $x>0$.

3.5 القيم القصوى للدالة (Extreme Values)

تعريف 2.5 (القيمة العظمى والقيمة الصغرى)

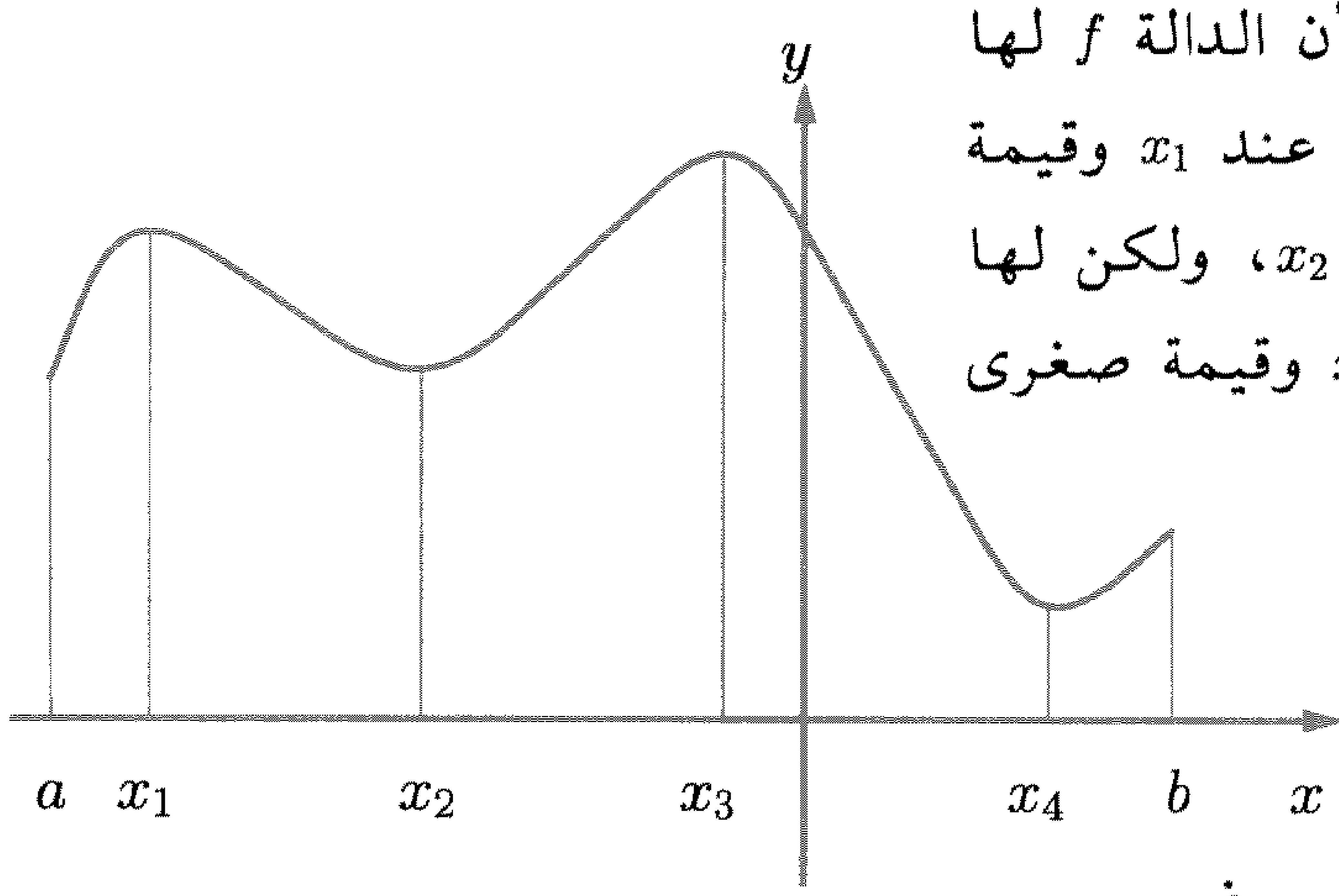
أ) الدالة f لها قيمة عظمى محلية (Local Maximum Value) عند x_0، إذا وجدت فترة مفتوحة (a,b)، تحتوي على x_0 حيث أن $f(x_0) \geq f(x)$ لأي x في الفترة (a,b)،

ب) الدالة f لها قيمة صغرى محلية (Local Minimum Value) عند x_0، إذا وجدت فترة مفتوحة (a,b)، تحتوي على x_0 حيث أن $f(x_0) \leq f(x)$ لأي x في الفترة (a,b).

ج) الدالة f لها قيمة عظمى عند x_0، إذا كان $f(x_0) \geq f(x)$ لأي x في نطاقها.

د) الدالة f لها قيمة صغرى عند x_0، إذا كان $f(x_0) \leq f(x)$ لأي x في نطاقها.

نلاحظ من الشكل أن الدالة f لها قيمة عظمى محلية عند x_1 وقيمة صغرى محلية عند x_2، ولكن لها قيمة عظمى عند x_3 وقيمة صغرى عند x_4.



الشكل 5.5

تسمى القيمة القصوى المحلية ـ في بعض الأحيان ـ القيمة القصوى النسبية.

تعريف 3.5 (النقطة الحرجة Critical Point)

لنفرض أن الدالة f معرّفة على الفترة $[a,b]$، تسمى النقطة x_0 النقطة الحرجة إذا كان $f'(x)=0$، أو $f'(x)$ غير موجودة.

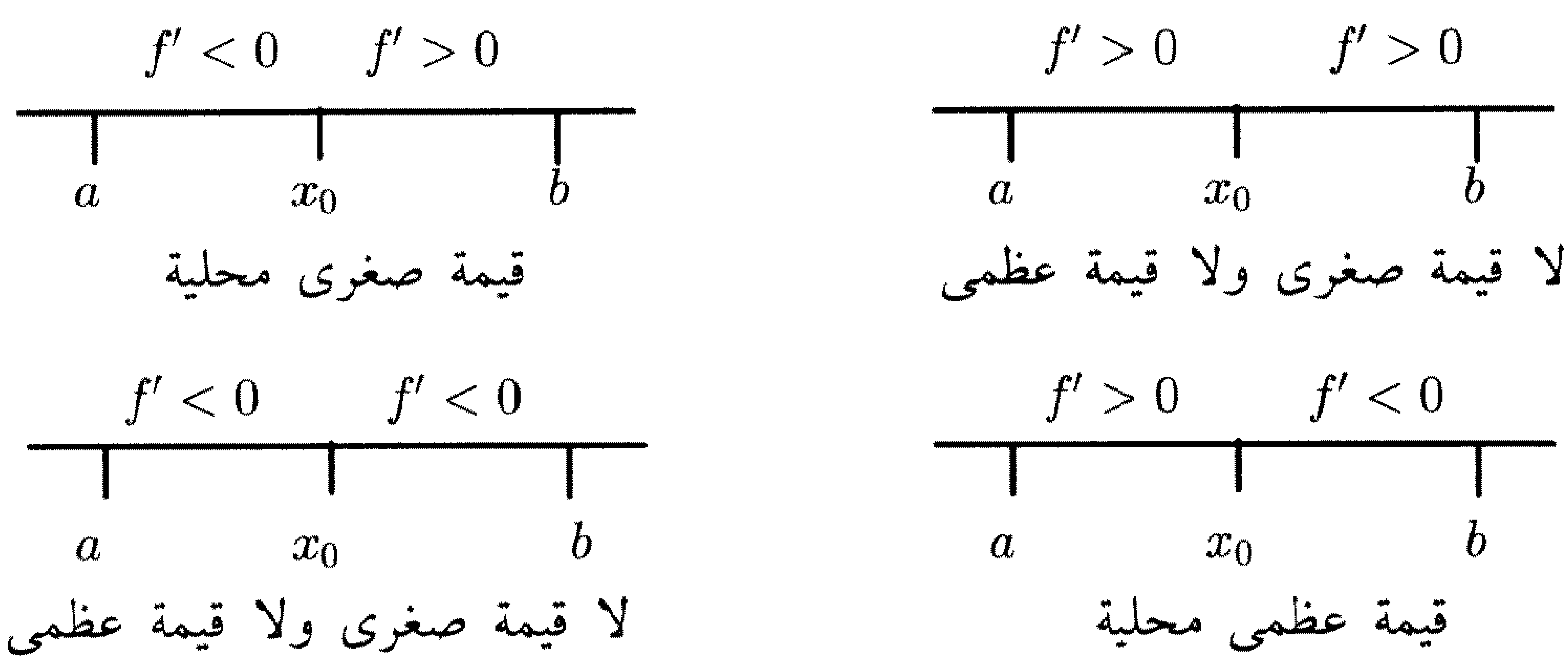
اختبار المشتقة الأولى

لنفرض أن $(x_0,f(x_0))$ نقطة حرجة للدالة f على الفترة (a,b)، ولنفرض أن f متصلة على $[a,b]$، وقابلة للاشتقاق على (a,b) (ليس من الضروري أن تكون قابلة للاشتقاق عند x_0).

أ) إذا كان $f'(x)>0$ لكل $x\in(a,x_0)$ و $f'(x)<0$ لكل $x\in(x_0,b)$ فإن f لها قيمة عظمى محلية عند x_0.

ب) إذا كان $f'(x)<0$ لكل $x\in(a,x_0)$ و $f'(x)>0$ لكل $x\in(x_0,b)$ فإن f لها قيمة صغرى محلية عند x_0.

ج) إذا كان $f'(x)>0$ لكل $x\in(a,b)$ أو $f'(x)<0$ لكل $x\in(a,b)$ فإن f ليس لها قيمة عظمى محلية ولا قيمة صغرى محلية.



إذا قسمنا الفترة (a,b) إلى الفترتين (a,x_0) و(x_0,b)، فإن هذا الاختبار يقول:

1) إذا كانت f دالة تزايدية على (a,x_0)، وتناقصية على (x_0,b)، فإن لها قيمة عظمى محلية عند x_0.

2) إذا كانت f دالة تناقصية على (a,x_0)، وتزايدية على (x_0,b)، فإن لها قيمة صغرى محلية عند x_0.

3) إذا كانت الدالة f تزايدية على الفترة (a,b) كلها، أو تناقصية على الفترة (a,b) كلها، فإنه لن تكون لها قيمة عظمى محلية ولا قيمة صغرى محلية

مثـــال 4

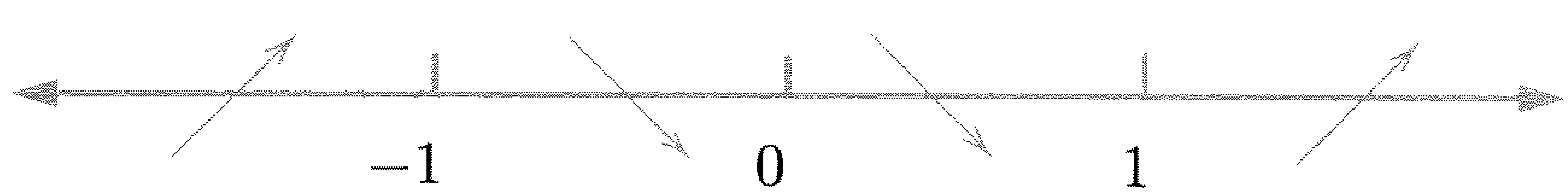
إذا كانت $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$، أوجد القيم القصوى المحلية للدالة f.

الحـــل

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$$

نلاحظ أن $f'(x)$ غير معرّفة عندما $x=0$ و$f'(x)=0$ عندما $x=\pm 1$. إذن، نقسم نطاق الدالة (وهو كل الأعداد الحقيقية عدا الصفر) إلى فترات.

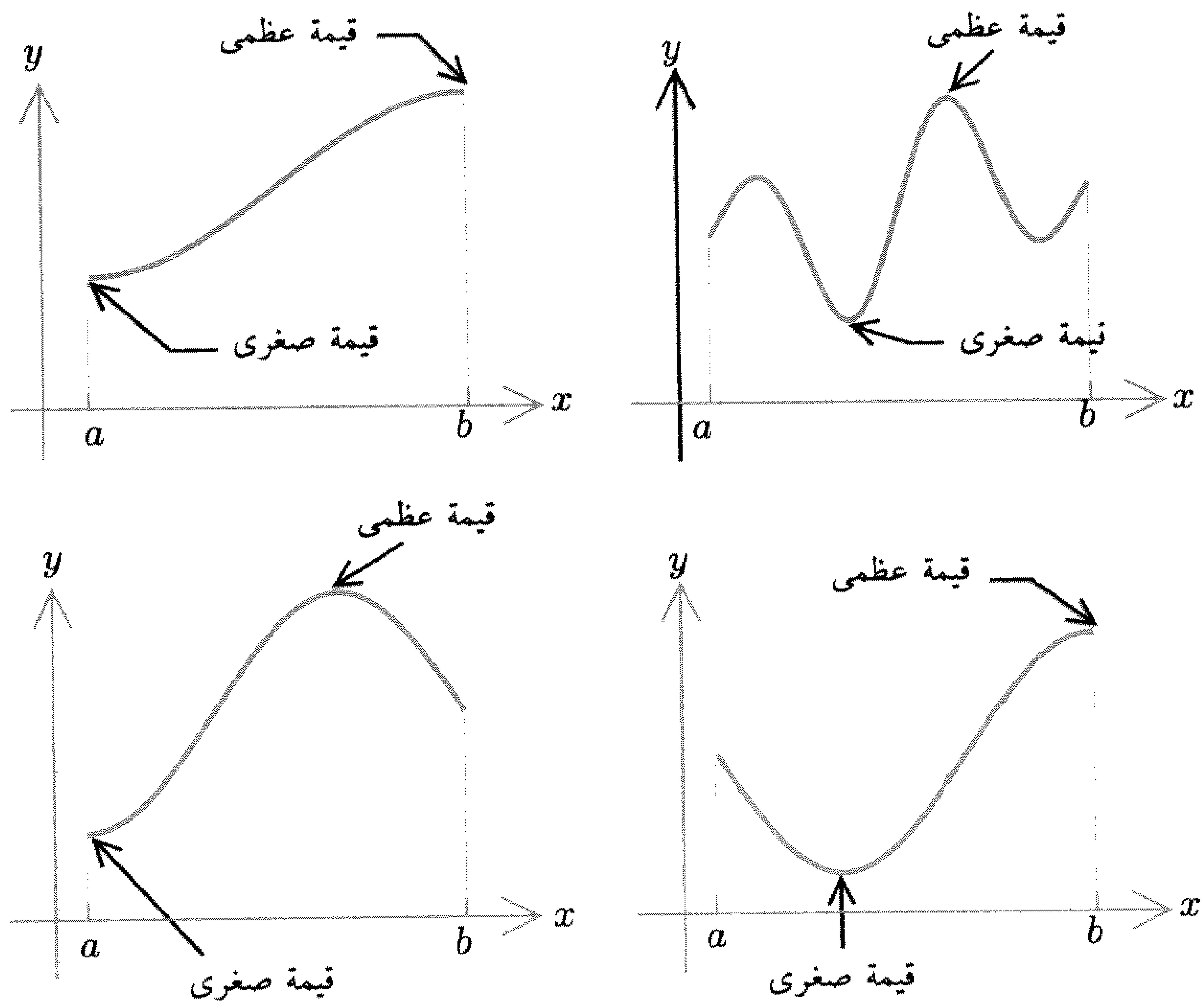
الفترات	إشارة f'	الدالة f	القيمة القصوى
$(-\infty,-1)$	$+$	تزايدية	$f(-1)$ قيمة عظمى محلية
$(-1,0)$	$-$	تناقصية	
$(0,1)$	$-$	تناقصية	$f(1)$ قيمة صغرى محلية
$(0,\infty)$	$+$	تزايدية	



نظرية 4

إذا كانت f دالة متصلة على فترة مغلقة $[a,b]$، فإن f تأخذ قيمة عظمى عند عدد في $[a,b]$، وتأخذ قيمة صغرى عند عدد في $[a,b]$.

هذه النظرية تقول إنه إذا كانت الدالة f متصلة على فترة مغلقة، فلا بد أن تكون لها قيمة عظمى، وقد تكون هذه القيمة العظمى عند إحدى نقطتي النهاية، ولا بد أن تكون لها قيمة صغرى، وقد تكون هذه القيمة الصغرى عند إحدى نقطتي النهاية.



لاحظ في هذه الحالة أنه إذا كان موقع القيمة القصوى داخل الفترة، يمكن إيجادها بالطرق التي تعرفنا عليها سابقاً، لأنها ـ في هذه الحالة ـ تكون نقطة

حرجة، ولكن عندما يكون موضع القيمة القصوى عند إحدى نقطتي النهاية، فليس من الضروري أن تكون نقطة حرجة، وبالتالي نتبع الإجراء الآتي.

كيفية إيجاد القيم القصوى للدالة المتصلة على فترة مغلقة

لنفرض أن f دالة متصلة على فترة مغلقة $[a,b]$، لإيجاد القيم القصوى لهذه الدالة على الفترة $[a,b]$ نتبع ما يلي:

1) أوجد النقطة الحرجة للدالة f على الفترة المفتوحة (a,b). أي أوجد القيم x التي تجعل $f'(x)=0$، أو التي تجعل $f'(x)$ غير موجودة.

2) أوجد قيم الدالة عند النقط التي حصلنا عليها من الخطوة (1).

3) أوجد قيم الدالة عند نقطتي نهاية الفترة، أي أوجد $f(a)$ و$f(b)$.

4) أكبر قيمة من القيم المحسوبة في الخطوتين (2) و(3) هي القيمة العظمى للدالة f على $[a,b]$، وأصغر قيمة من القيم المحسوبة في الخطوتين (2) و(3) هي القيمة الصغرى للدالة f على $[a,b]$.

مثـــال 5

أوجد القيم القصوى للدالة $f(x)=x^2-x$ على $[0,2]$.

الحـــل

$$f'(x)=2x-1$$

إذن النقطة الحرجة الوحدة في الفترة $[0,2]$ هي $x=\frac{1}{2}$، التي حصلنا عليها من $2x-1=0$.

الآن

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$$

و

$$f(0)=(0)^2-0=0$$

و
$$f(2) = (2)^2 - 2 = 2$$

إذن (2) قيمة عظمى للدالة f على $[0,2]$ و$f\left(\frac{1}{2}\right)$ قيمة صغرى للدالة f على $[0,2]$.

مثـــال 6

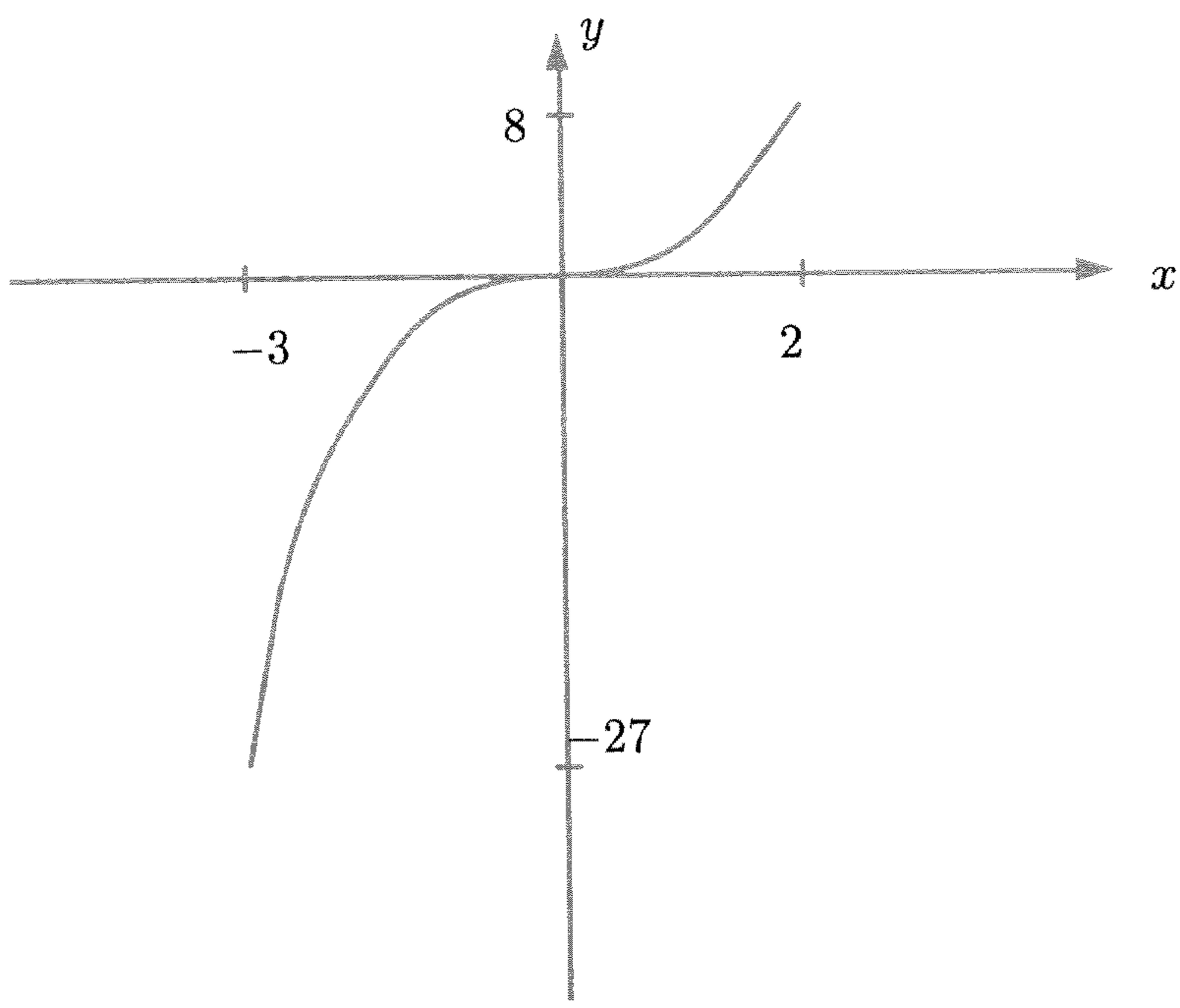
أوجد القيم القصوى للدالة $f(x) = x^3$ على $[-3,2]$.

الحـــل

$$f'(x) = 3x^2$$

إذن النقطة الحرجة الوحيدة في الفترة $[0,2]$ هي $x = 0$، التي حصلنا عليها من $3x^2 = 0$.

الآن $f(0) = 0$ و $f(-3) = -27$ و$f(2) = 8$.



إذن $f(2)$ قيمة عظمى للدالة f على $[-3,2]$ و$f(-3)$ قيمة صغرى للدالة f على $[-3,2]$.

لاحظ في هذا المثال أن $(0,0)$ نقطة حرجة للدالة f، ولكن الدالة f ليس لها قيمة قصوى عندما $x = 0$.

تمارين 3.5

في التمارين من 1 إلى 8، أوجد النقاط الحرجة كلها، وحدد القيم القصوى للدالة المعطاة.

1) $f(x) = -x^2 + 2x - 4$

2) $f(x) = x^3 - x$

3) $f(x) = (x+1)^{\frac{1}{3}}$

2) $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{x^2}$

5) $f(x) = \mathbf{cos}\ \ x$

6) $f(x) = \mathbf{sin}\ \ x$

7) $f(x) = x^4$

8) $f(x) = 4x^2 - 8x$

في المسائل من 9 إلى 13، أوجد القيمة الصغرى والقيمة العظمى للدالة المعطاة على الفترات المعطاة.

9) $f(x) = 2x^3 + x^2 - 12x + 5$ ، $[0,4]$.

10) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ ، $[1,5]$،

11) $f(x) = -2x\sqrt{x+3}$ ، $[-2/5, 5]$.

12) $f(x) = \dfrac{\mathbf{sin}\ (x+2)}{3}$ ، $[0,\pi]$.

13) $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ ، $[0,\pi]$.

14) إذا كان $f(x) = g(x)h(x)l(x)$ فاستخدم قانون الضرب للبرهنة على أن:

$$\frac{df}{dx} = gh\frac{dl}{dx} + gl\frac{dh}{dx} + hl\frac{dg}{dx} = ghl' + gh'l + g'hl$$

15) إذا كان $P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$، برهن أن:

$$\frac{p'(x)}{p(x)} = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c}$$

16) أوجد $f'(x)$ إذا كانت $f(x) = \frac{\sqrt{x}+2x}{\sqrt{x}-4}$.

17) أوجد $f'(x)$ إذا كانت $f(x) = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{1-\sqrt{x}}$.

18) إذا كانت $\sqrt{x^2+100}\,\frac{x+8}{x} = f(x)$، أوجد:

أ) النقط الحرجة للدالة f.

ب) نقط النهاية القصوى للدالة f.

19) إذا كانت $f(x) = x^3 + \cos x$، أوجد:

أ) النقط الحرجة للدالة f.

ب) نقط النهاية القصوى للدالة f.

20) إذا كانت $f(x) = |x^2 - 1|$، أوجد:

أ) النقط الحرجة للدالة f.

ب) نقط النهاية القصوى للدالة f.

4.5 التقعّر واختبار المشتقة الثانية
Concavity and the Second Derivative Test

تعريف 4.5 (التقعر)

لنفرض أن $f''(x)$ موجودة على الفترة (a,b).

1) إذا كان $f''(x) > 0$ على (a,b)، فإن بيان الدالة يكون مقعراً إلى أعلى على (a,b).

2) إذا كان $f''(x) < 0$ على (a,b)، فإن بيان الدالة يكون مقعراً إلى أسفل على (a,b).

تعريف 5.5 (نقطة الانقلاب)

تسمى النقطة $(x_0, f(x_0))$ نقطة انقلاب لبيان الدالة f إذا تغير اتجاه تقعّر بيان الدالة f عند x_0.

قد تكون للدالة f نقطة انقلاب عند $(x_0, f(x_0))$ في إحدى الحالتين:

(1) $f''(x_0) = 0$ أو (2) $f''(x_0)$ غير موجود.

إذا كان $f''(x_0)$ موجوداً و $(x_0, f(x_0))$ نقطة انقلاب للدالة f، فمن الضروري أن يكون $f''(x_0) = 0$.

الجدير بالذكر أن عكس هذه الجملة غير صحيح، أي إذا كان $f''(x_0) = 0$، فإنه ليس من الضروري أن تكون نقطة انقلاب، والمثال على ذلك بيان $f(x) = x^2$.

مثـال 7

أوجد نقطة الانقلاب، وناقش تقعّر الدالة $f(x) = x^3 - 2x$

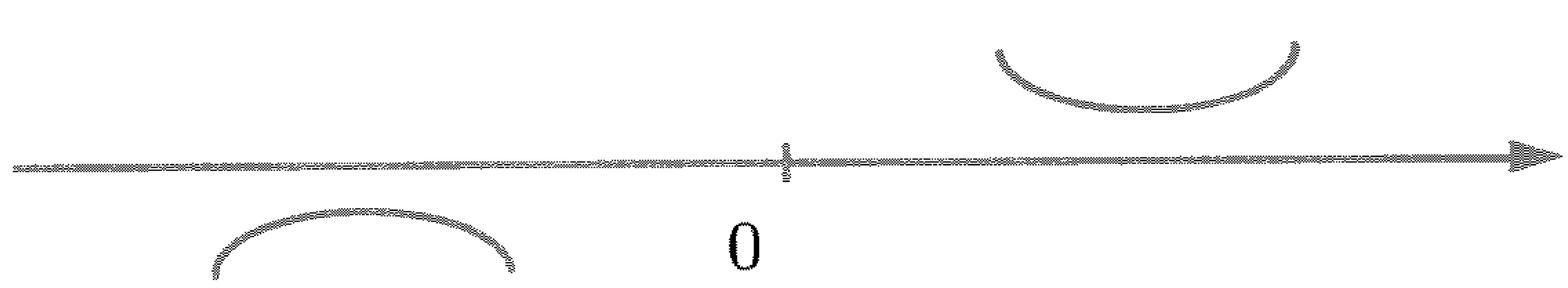
الحـل

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 2 \\ f''(x) &= 6x \end{aligned}$$

نلاحظ أن $f''(x)$ معرّف دائماً، وأن $f'''(x) = 0$ عندما $x = 0$.

إذن نقسم نطاق الدالة f (وهو الأعداد الحقيقية كلها) إلى فترات.

الفترات	$f''(x)$	بيان الدالة f
$(-\infty, 0)$	$-$	مقعر إلى أسفل
		النقطة $(0,0)$ نقطة انقلاب
$(0, \infty)$	$+$	مقعر إلى أعلى



اختبار المشتقة الثانية:

لنفرض أن f قابلة للاشتقاق على فترة مفتوحة، تحتوي على x_0.

إذا كان $f''(x_0)$ موجوداً، فإنه:

1) إذا كان $f'(x_0) = 0$ و $f''(x_0) > 0$، فإن f لها قيمة صغرى محلية عند x_0.

2) إذا كان $f'(x_0) = 0$ و $f''(x_0) < 0$، فإن f لها قيمة عظمى محلية عند x_0.

إذا كان $f''(x_0) = 0$، فإن هذا الاختبار لا ينفع لتحديد القيم القصوى للدالة، ولا بد من الرجوع إلى اختبار المشتقة الأولى.

مثـــال 8

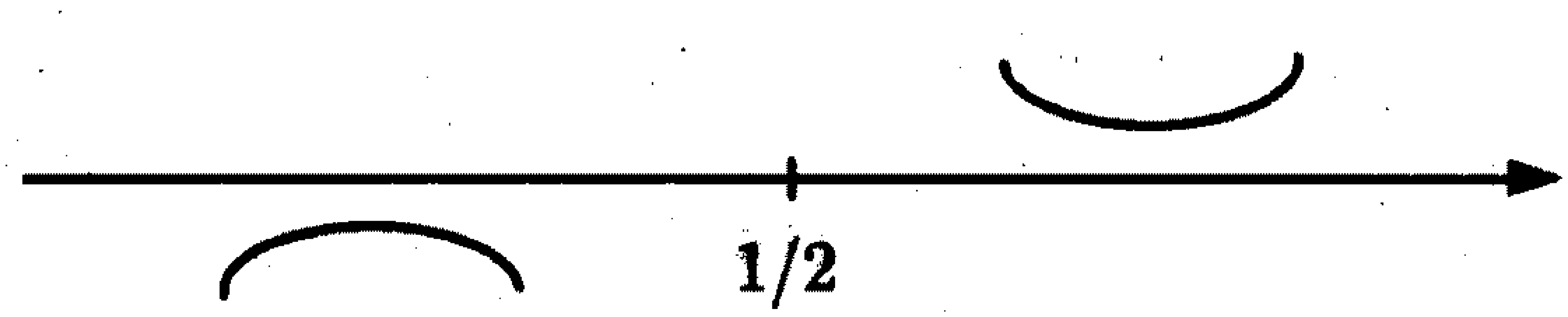
أوجد القيم القصوى للدالة $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$

الحـــل

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 6x^2 - 6x - 12 \\
f''(x) &= 12x - 6 = 6(2x - 1)
\end{aligned}
$$

نلاحظ أن $f''(x)$ معرّف دائماً، وأن $f''(x) = 0$ عندما $x = 1/2$.

إذن نقسم نطاق الدالة f (وهو الأعداد الحقيقية كلها) إلى فترات.



النقطة $(1/2, 3/2) = ((1/2), f(1/2))$ هي نقطة الانقلاب.

$f'(x) = 0$ عندما $6x^2 - 6x - 12 = 0$ عندما $(x+1)(x-2) = 0$ ومعنى ذلك أن $x = 2$ أو $x = -1$.

وحيث أن $f''(2) = 18 > 0$، فإن $(2, -15)$ نقطة نهاية صغرى.

وحيث إن $f''(-1) = -24 > 0$، فإن $(-1, 12)$ نقطة نهاية عظمى.

تمارين 4.5

في التمارين من 1 إلى 10، أوجد نقط الانقلاب للدالة المعطاة، وناقش تقعّر بيان الدالة المعطاة.

1) $f(x) = x^3 - x - 6$

2) $f(x) = (x+1)^3$

3) $f(x) = 2x + \dfrac{2}{x}$

4) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + x}$

5) $g(x) = (x-1)^{\frac{8}{3}} + (x-1)^2$

6) $f(x) = 1 + (x-2)^{\frac{2}{3}}$

7) $f(x) = x - \sqrt{x}$

8) $f(x) = \sin\ (2x)$

9) $f(x) = x \sin\ x$

10) $f(x) = 1 + \left(\dfrac{x}{x-1}\right)^{\frac{1}{3}}$

في التمارين من 11 إلى 15، استخدم اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القيم القصوى للدالة المعطاة:

11) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 4$

12) $f(x) = x(x-2)^2$

13) $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2}$

14) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$