جامعة الانبار
كلية علوم الحاسوب وتكنولوجيا المعلومات
قسم أنظمة شبكات الحاسوب

رياضيات ١

Mathematics 1

قواعد الدوال ... sin

Derivatives of the six trig functions

المرحلة الأولى – الفصل الاول

م.م. عدي عبد هزام

15) $f(x) = 3x^4 + 8x^3 - 18x^2 + 12$

16) أوجد نقط الانقلاب للدالة $f(x) = x\sin x$.

17) إذا كانت $f(x) = \dfrac{k-x}{k^2+x^2}$ حيث k مقدار ثابت، أوضح أن نقط الانقلاب لهذه الدالة تقع على خط مستقيم.

18) إذا كانت f دالة تعكيبية وكان لها قيمة عظمى محلية وقيمة صغرى محلية، أوضح أن نقطة الانقلاب في منتصف المسافة بين النهايتين.

19) لنفرض أن الدالة f قابلة للاشتقاق على فترة مفتوحة، وبيان الدالة f مقعّر إلى أعلى على تلك الفترة. إذا كان a, b عددين مختلفين في الفترة المذكورة، برهن على أن:

$$f(b) > f(a) + f'(a)(b-a)$$

20) إذا كانت $f(x) = x^2 - \sin x$، أوجد:

أ) نقط الانقلاب للدالة f .

ب) الفترات التي يكون عليها بيان الدالة f مقعّراً إلى أعلى.

ج) الفترات التي يكون عليها بيان الدالة f مقعّراً إلى أسفل.

5.5 خطوط التقارب (Asymptotes)

المستقيم $y = \lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ يسمى خط التقارب الأفقي (Horizontal Asymptote).

والمستقيم $x = a$ عند $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ يسمى خط التقارب العمودي (Vertical Asymptote).

مثال 9

$y = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{(1/x)+1}$ و $y = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{1+x} = 1$.

$y = 1$ يسمى خط التقارب الأفقي للدالة $y = \frac{x}{1+x}$.

ومن $\lim_{x\to -1} \frac{1}{(1+x)^2} = \infty$ ، نجد أن $x = -1$ هو خط تقارب عمودي للدالة $y = \frac{1}{(1+x)^2}$.

بيان الدوال

لبيان الدالة $y = f(x)$ نتبع الخطوات التالية:

1) نجد $y = f'(x)$ ونحدد أين تكون الدالة تزايدية، وأين تكون تناقصية، وكذلك كل النقط x، حيث $f'(x) = 0$ أو $f'(x)$ غير موجودة.

2) نجد $f''(x)$ ونحدد أين يكون البيان مقعّراً إلى أعلى، وأين يكون مقعّراً إلى أسفل.

3) نحدد القيم القصوى المحلية إما باختبار المشتقة الأولى، أو باختبار المشتقة الثانية.

4) نجد كل نقط الانقلاب.

5) نحدد $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ وإذا كانت أي من النهايتين محددة، فمنها نجد خطوط التقارب الأفقية.

6) نجد نقط التقاطع مع محور السينات، ونقط التقاطع مع محور الصادات، إذا كان ممكناً.

7) إذا كانت الدالة غير معرّفة عند x_0، فنجد: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ ومن ذلك، نجد خطوط التقارب العمودية، وهي الخطوط التي على الشكل $x = x_0$ عندما يكون $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \infty$ أو $-\infty$ و $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \infty$ أو $-\infty$ و $f(x_0)$ غير معرّفة.

مثال 10

أعط بيانياً تقريبياً للدالة $y = \dfrac{x}{1+x}$.

الحل

نلاحظ أن الدالة $y = \dfrac{x}{1+x}$ غير معرّفة عند $x = -1$، وأن $y' = \dfrac{1}{(1+x)^2}$ ومن ذلك، نلاحظ أن الدالة تزايدية دائماً، إلا عند $x = -1$ الذي لا تكون الدالة معرّفة عنده، وبذلك $x = -1$ لا تكون نقطة حرجة للدالة f.

ندرس الآن $y'' = \dfrac{-2}{(1+x)^3}$

نلاحظ أن y'' غير معرّف عندما $x = -1$، ونلاحظ كذلك أن $y'' > 0$ إذا كان $x < -1$، وأن $y'' < 0$ إذا كان $x > -1$، وبذلك فإن بيان الدالة مقعّر إلى أعلى على $(-\infty, -1)$، ومقعّر إلى أسفل على $(-1, \infty)$.

نلاحظ أن: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{1+x} = 1$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{1+x} = 1$

إذن $y = 1$ هو خط التقارب الأفقي لبيان الدالة.

أيضاً : $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x}{1+x} = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x}{1+x} = \infty$

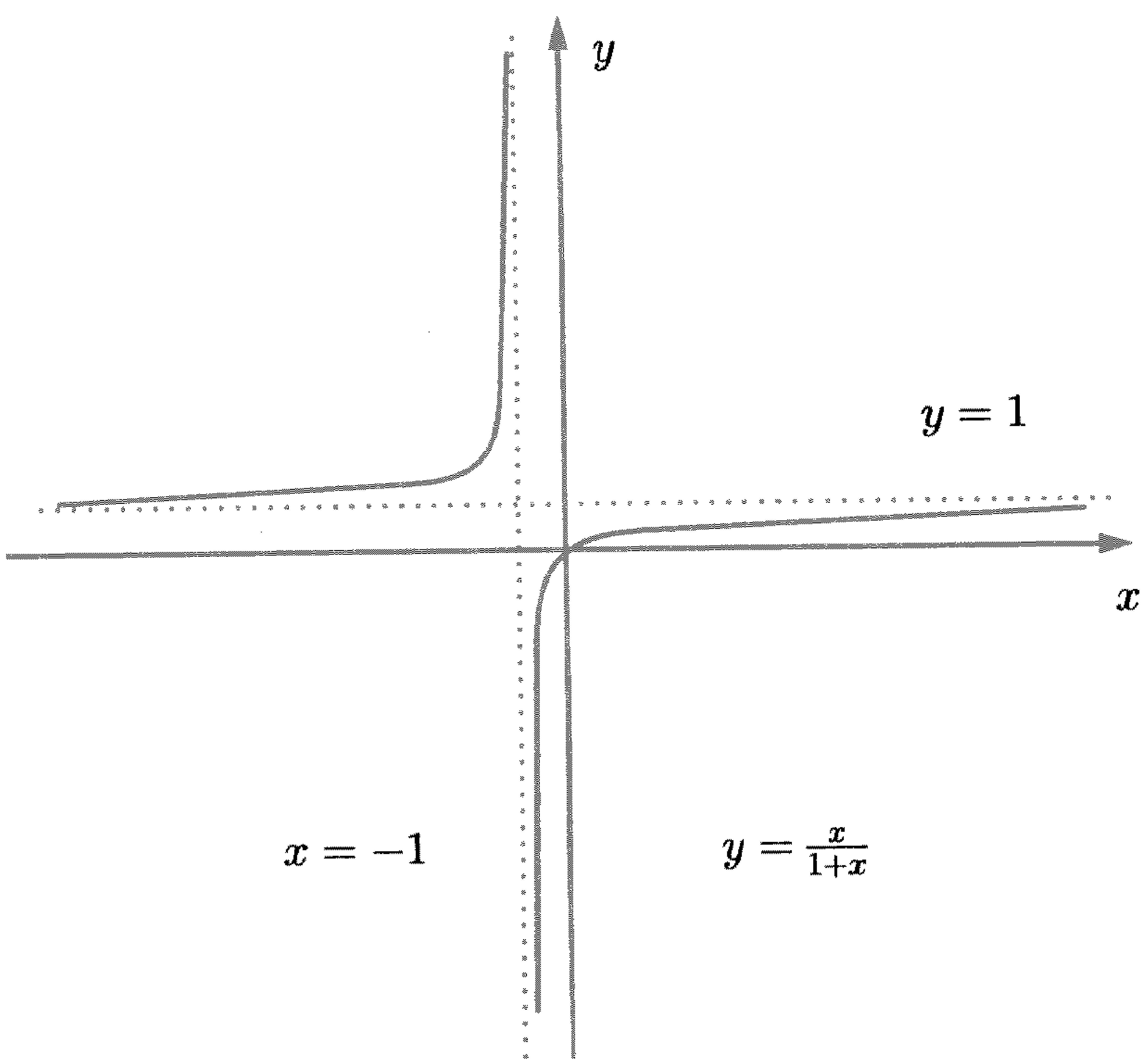
إذن $x = -1$ هو خط التقارب العمودي للدالة.

ملاحظة : نجد نقط التقاطع مع محور السينات، وذلك بوضع $y = 0$. ومن ذلك نجد $x = 0$، إذن $(0,0)$ هي نقطة التقاطع مع محور السينات.

وأيضاً نجد التقاطع مع محور الصادات، وذلك بوضع $x = 0$. ومن ذلك نجد أن $y = 0$.

عند $x = -2$، فإن $y = \dfrac{-2}{1+(-2)}$. وبذلك فإن البيان يقع أعلى المستقيم $y = 1$ في الفترة $(-\infty, -1)$.

الآن... الشكل التالي يوضح بيان الدالة.



الشكل 6.5 بيان الدالة $y = \frac{x}{1+x}$

تمارين 5.5

في التمارين من 1 إلى 10، أوجد خطوط التقارب العمودية، وخطوط التقارب الأفقية في كل حالة:

1) $f(x) = \dfrac{7x}{2x-5}$

2) $g(x) = \dfrac{3}{(x+1)^2}$

3) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{25-x^2}}{5-x}$

4) $g(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+9}$

5) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x-2}}$

6) $g(x) = \dfrac{x^2-1}{x}$

7) $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$

8) $g(x) = \dfrac{x+2}{\sqrt{1-x}}$

9) $f(x) = \cot\ x$

10) $f(x) = 3x - 2 - \dfrac{1}{x^2+1}$

11) إذا كانت $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$، أوضح أن $x = 0$ لا يكون خط تقارب عموديًا للدالة f، على الرغم من أن $x = 0$ يجعل مقام الدالة f مساوياً للصفر.

12) أوضح أن $x = 0$ لا يكون خط تقارب عموديًا للدالة $g(x) = \dfrac{1+\csc x}{1+x}$.

في المسائل من 13 إلى 24، تتبع الخطوات التي تعلمتها لبيان الدالة المعطاة:

13) $y = x^3 + 3$

14) $y = 4x^3 - 3x + 2$

15) $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^3}{2} - 2x + \dfrac{2}{3}$

16) $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$

17) $f(x) = x\sqrt{1+x}$

18) $f(x) = (x-1)^{\frac{1}{5}}$

19) $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x^2}$

20) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$

(21 $f(x) = 1 + \dfrac{x-1}{x-2}$

(22 $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$

(23 $f(x) = \dfrac{4x-4}{3x+6}$

(24 $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$

(25 إذا كانت $f(x) = x^5$، أوضح أن للدالة f نقطة حرجة عند $x = 0$، ولكن ليس لها قيمة عظمى محلية ولا قيمة صغرى محلية عند $x = 0$.

6.5 مسائل تطبيقية تعتمد على القيم القصوى

في التطبيقات السابقة للمشتقات، تعطى الدالة المراد إيجاد قيمتها القصوى، ولكن في هذا التطبيق، فإن جزءاً من المطلوب هو تكوين الدالة المراد إيجاد قيمتها القصوى، وذلك بناءً على معلومات معطاة في المسألة.

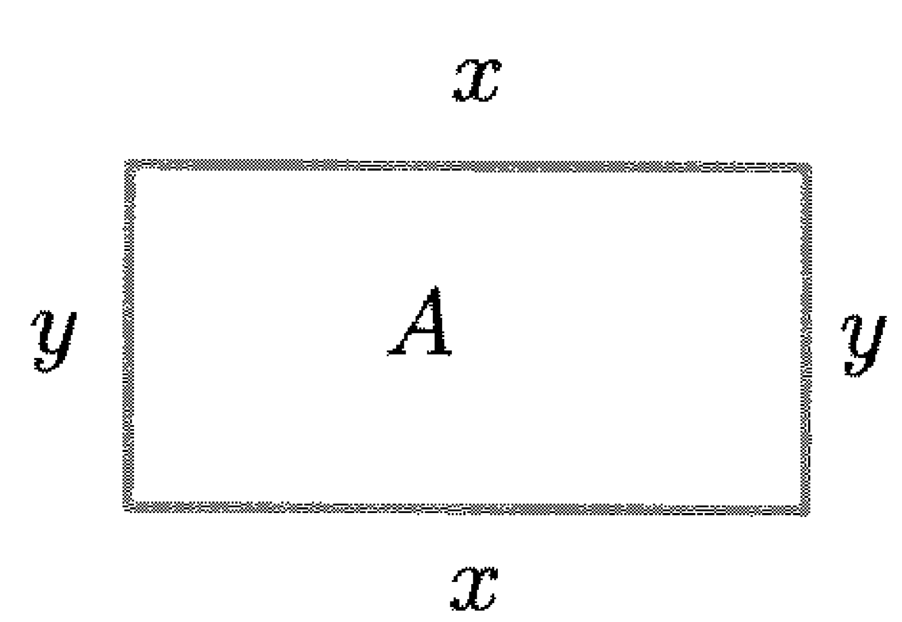
مثال 11

قرر مزارع أن يبني مزرعة دواجن من الأسلاك الشائكة على شكل مستطيل. ما أبعاد المستطيل الذي يحوز أكبر مساحة إذا كان المزارع يملك 100 متر من الأسلاك الشائكة؟

الحل

نفرض أن طول المستطيل x وعرضه y. إذا كانت مساحة المستطيل A، فإن:

$$A = xy$$



الشكل 7.5

لاحظ أن $2x + 2y = 100$

إذن $y = \dfrac{100 - 2x}{2} = 50 - x$

إذن $A = (50 - x)x = 50 - x - x$

نريد الحصول على أكبر مساحة، وهذا يعني وجود قيمة x التي تبلغ عندها A قيمتها القصوى.

$$A' = 50 - 2x$$

إذن $50 - 2x = 0$ يعني أن $x = 25$

وبذلك يكون $y = 50 - 25$ وهذا يعني أن $y = 25$

إذن أبعاد المستطيل هي: الطول $= 25$ متر والعرض $= 25$ متر

مثـــال 12

رسم مستطيل داخل نصف دائرة نصف قطرها r. إذا كان أحد أضلاع المستطيل على قطر نصف الدائرة، أوجد أكبر مساحة لهذا المستطيل.

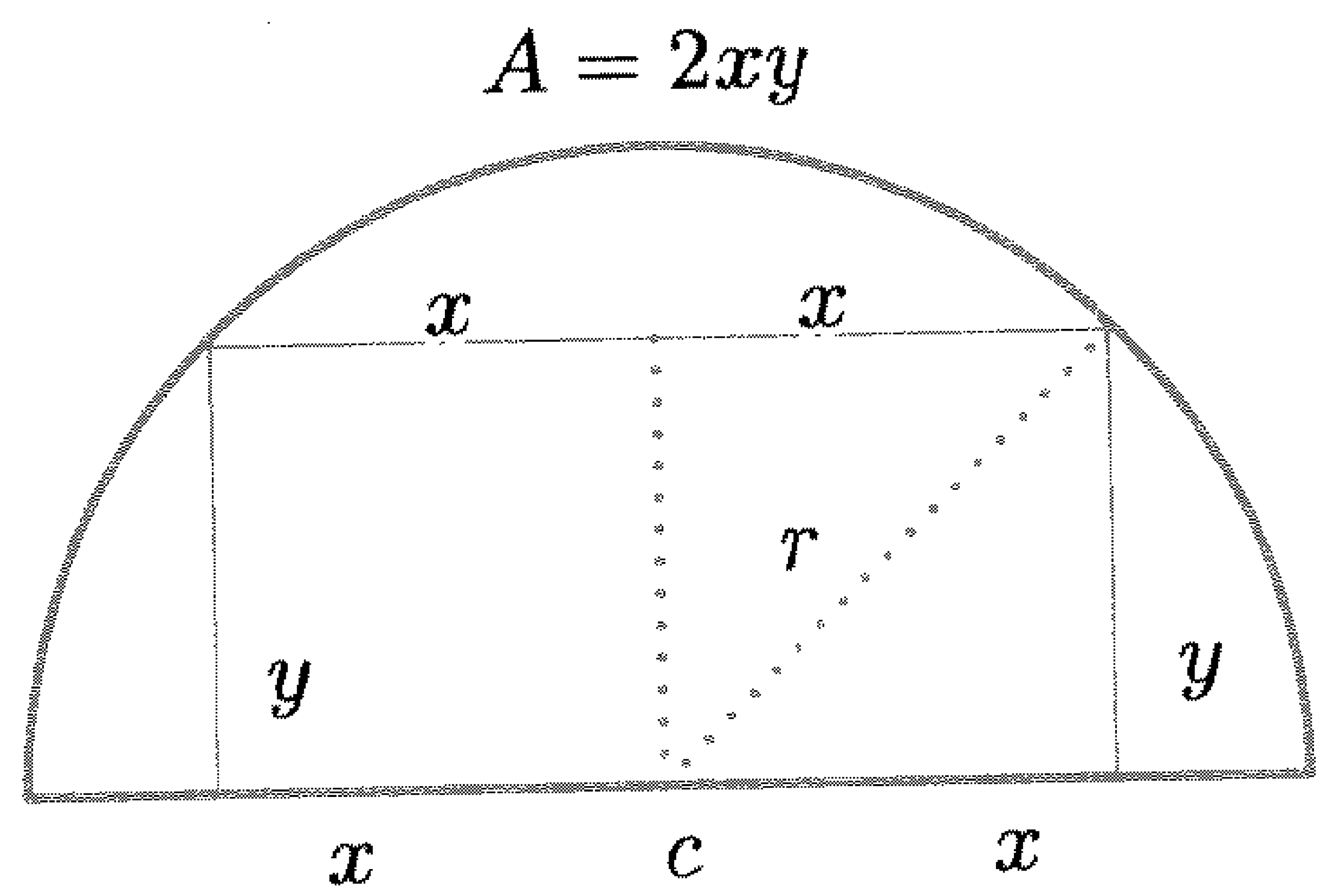
الحـــل

إذا كانت أطوال أضلاع المستطيل هي: $y, 2x$، فإن مساحة المستطيل A هي:

$$A = 2xy$$

نلاحظ أن $x^2 + y^2 = r^2$، ومنها $y = \sqrt{r^2 - x^2}$

إذن $A = 2x\sqrt{r^2 - x^2} = 2x(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$



الشكل 8.5

$$A' = 2(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} + 2x(1/2)(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)$$

$$= 2(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} - 2x^2(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 2\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{2r^2 - 2x^2 - 2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$= \frac{2r^2 - 4x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

نلاحظ أن A' غير موجود عندما $x = r$ وهذا مستحيل. (لماذا؟)

و$A'=0$ عندما $x=\pm\frac{r}{\sqrt{2}}$، ولكننا نبحث عن طول، إذن $x=\frac{r}{\sqrt{2}}$.
حيث أن $A(x)=2x\sqrt{r^2-x^2}$، فإن أكبر مساحة لهذا المستطيل هي:

$$A\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)=2\frac{r}{\sqrt{2}}\sqrt{r^2-\frac{r^2}{2}}=\frac{2r}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{r^2}{2}}=\frac{2r}{\sqrt{2}}\,\frac{r}{\sqrt{2}}=r^2$$

مثـــال 13

أوجد حجم أسطوانة دائرية قائمة رسمت داخل مخروط ارتفاعه 12 سم ونصف قطر قاعدته 4 سم، إذا كان محور الأسطوانة والمخروط متطابقين بحيث يكون حجم الأسطوانة أكبر ما يمكن.

الحـــل

إذا رمزنا لحجم الأسطوانة بالرمز V، فإن:

$$V=\pi r^2 h$$

حيث h ارتفاع الأسطوانة وr نصف قطرها.

من تشابه المثلثين abd وdce نجد أن:

$$\frac{ab}{bd}=\frac{ec}{cd}$$

أي أن: $$\frac{12}{4}=\frac{h}{4-r}$$

وهذا يعني أن: $$h=3(4-r)$$

إذن: $$V=3\pi r^2(4-r)=3\pi(4r^2-r^3)$$

وهذا يعني أن: $$\frac{dV}{dr}=3\pi(8r-3r^2)$$

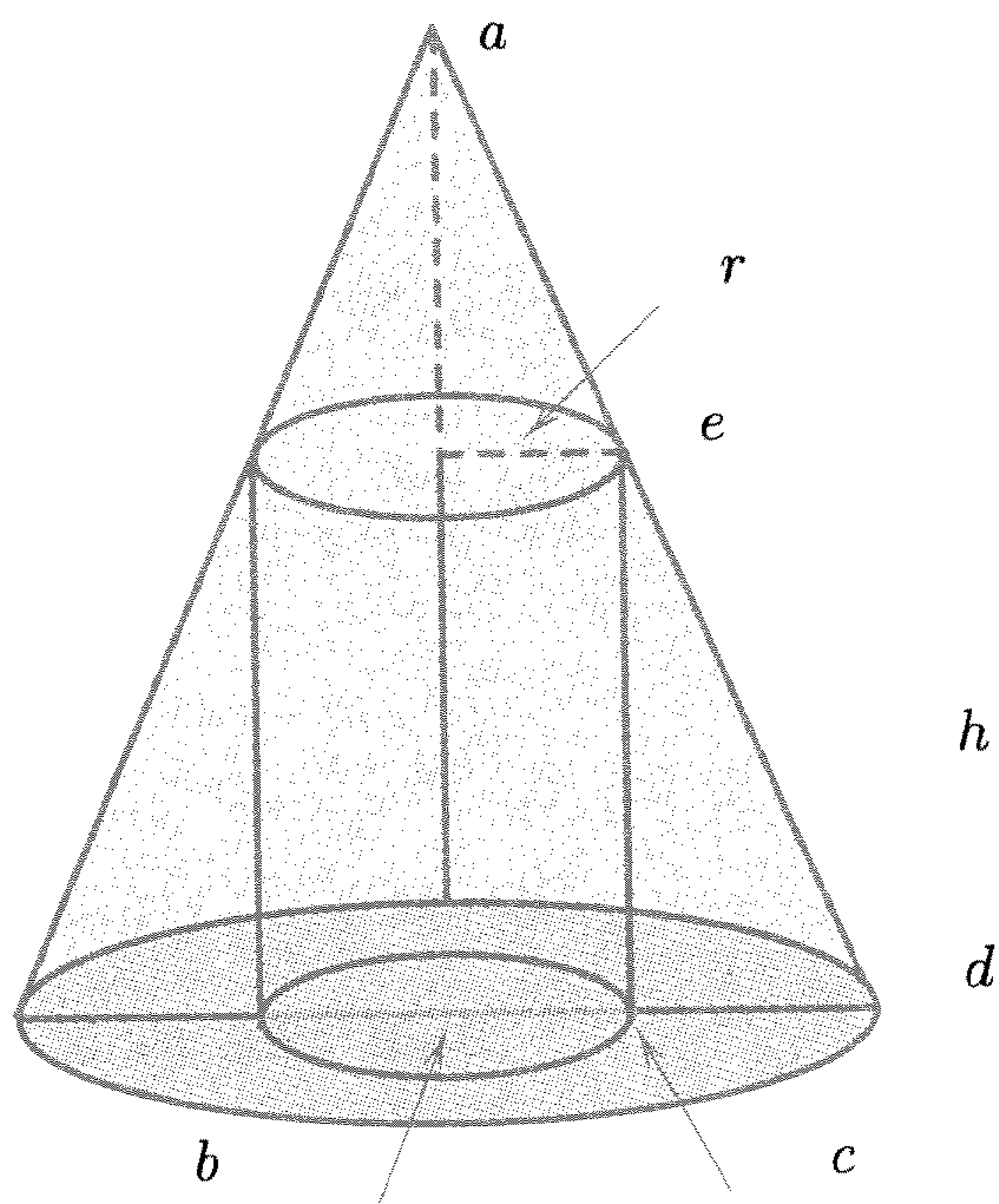
بمساواة المشتقة الأولى بالصفر تحصل على: $r=0$ أو $r=8/3$

الآن:
$$V''(r) = \frac{d^2V}{dr^2} = 3\pi(8-6r)$$

ولكن $V''(8/3) < 0$.

إذن أكبر حجم ممكن لهذه الأسطوانة هو:

$$V = 3\pi(8/3)^2(4-8/3) = 256\pi/9$$



تمارين 6.5

1) أوجد عددين موجبين حاصل جمعهما 18 وحاصل ضربهما أكبر ما يمكن.

2) أوجد النقط على المستقيم $y = 2x - 4$ والتي تكون أقرب ما يمكن إلى النقطة $(1,3)$.

3) أوجد النقط على القطع المكافئ $y = x^2 + 2x$ والتي تكون أقرب ما يمكن إلى النقطة $(-1,0)$.

4) طلب من أحد المصانع تصنيع براميل على شكل أسطوانة تتسع 32 متراً مكعباً من السائل. إذا كانت تكلفة الجوانب تساوي نصف تكلفة الغطاء والقاعدة السفلية، فما أبعاد البرميل بشرط أن يكلف تصنيعه أقل ما يمكن؟

5) إذا قطع خيط طوله 20 متراً إلى قطعتين، بحيث وضعت إحداهما لتشكل مثلثاً متساوي الأضلاع، ووضعت الأخرى لتشكل دائرة. كيف يجب قطع الخيط، بحيث تكون مساحة الشكلين أكبر ما يمكن.

6) مزارع يملك أسلاكاً شائكة طولها 1000 متر. يريد المزارع أن يضع هذه الأسلاك في شكل مستطيل، ما هي الأبعاد التي يوضع بها هذا الشكل المستطيل حتى يكون له أكبر مساحة ممكنة؟

7) يراد تصنيع صندوق من الورق المقوّى بقاعدة مربعة ومفتوحة من الأعلى من قطعة ورق مقوّى على شكل مربّع طول ضلعه 10 سم وذلك بقطع 1 سم من كل جانب من الجوانب الأربعة وتحريك الجوانب إلى أعلى. ما هي أبعاد الصندوق حتى يكون حجمه أكبر ما يمكن؟

8) وضع جسم متحرك وفق المعادلة $S(t) = 4t - 6t^2 + 6$، ما هي قيمة t التي تجعل سرعة الجسم أعلى ما يمكن؟

9) إذا كان معدل نمو السكان في مدينة يتم وفق $R = 400P^2 - \frac{1}{5}P^3$، حيث P عدد السكان. ما هو عدد السكان P الذي يجعل هذا المعدل أكبر ما يمكن؟

10) إذا كان مجموع عددين غير سالبين هو 3، أوجد العددين إذا كان مربع مضاعف أحدهما مطروحاً منه مضاعف مربع الثاني يكون أقل ما يمكن.

7.5 التقريب والتفاضل (Approximation and Differential)

لنفرض أن $y = f(x)$ ، $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(\Delta x)$

وحيث أن: $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$، فإن:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$f'(x) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{(تقريباً)}$$

ومن ذلك

$$\boxed{\Delta y \approx f'(x)\Delta x}$$

هذه الصيغة تخبرنا بأنه إذا زاد x بمقدار صغير Δx، فإن y يزداد بمقدار $\Delta y \approx f'(x)\Delta x$.

Δy تسمى الزيادة في y وتسمى Δx الزيادة في x.

المقدار $E_{\Delta x} = |\Delta y - f'(x)\Delta x|$ يسمى الخطأ المطلق للتقريب.

مثال 14

إذا كانت $f(x) = x^2$ أوجد Δy على الفترات $[1, 1.05]$ و$[1, 1.1]$ و$[1, 1.5]$. وقارن ذلك بالنتيجة الفعلية.

الحل

على الفترة $[1, 1.05]$ ، $\Delta x = 0.05$ ، $f'(1) = 2, f'(x) = 2x$.

إذن $\Delta y = f'(x)\Delta x = f'(1)\Delta x = (2)(0.05) = 0.10$

القيمة الفعلية:

$$\Delta y = f(1 + 0.05) - f(1) = (1.05)^2 - 1 = 0.1025$$

على الفترة $[1, 1.1]$ ، $\Delta x = 0.1$ ، $\Delta y = (2)(0.1) = 0.2$

القيمة الفعلية في هذه الحالة هي:

$$\Delta y = f(1 + 0.1) - f(1) = (1.1)^2 - 1 = 0.21$$

على الفترة $[1, 1.5]$ ، $\Delta x = 0.5$ ، $\Delta y = (2)(0.5) = 1$

القيمة الفعلية في هذه الحالة هي:

$$\Delta y = f(1 + 0.5) - f(1) = (1.5)^2 - 1 = 1.25$$

نلاحظ أن التقريب أقرب إلى القيمة الفعلية، إذا كانت Δx أصغر.

مثـال 15

أوجد تقريباً لـ $(2.01)^3$ وقارن ذلك بالنتيجة الفعلية.

الحـل

$$y = f(x) = x^3$$

السؤال الآن، هو إيجاد $f(2.01)$.

$$f(2.01) - f(2) = \Delta y \approx f'(x)\Delta x = f'(2)(0.01)$$

بما أن $f'(x) = 3x^2$، فإن $f'(2) = 3(2)^2$، القيمة الفعلية: $f(2) = 8$

إذن $$f(2.01) \approx f(2) + f'(2)(0.01) = 8 + 12(0.01) = 8.12$$

القيمة الفعلية لـ $(2.01)^3$ هي 8.120601، أي أن التقريب 8.12 تقريب جيد.

تمارين 7.5

1) قرّب القيمة $\sqrt{16.2}$.

2) قرّب القيمة $\sqrt[3]{7.95}$.

3) أوجد القيمة التقريبية لـ $\sin\left(\frac{\pi}{6}+0.0175\right)$.

4) أوجد القيمة التقريبية لـ $\frac{1}{1.5}$.

5) أوجد القيمة التقريبية لـ $(0.79)^{\frac{5}{8}}$.

6) أوجد القيمة التقريبية لـ $(1.01)^6+(1.01)^4+(1.01)^2$.

7) أوجد القيمة التقريبية للمقدار $\sin\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}+0.1\right)^2$.

8) أوجد القيمة التقريبية للمقدار $\frac{1}{\sqrt{3.89}}$.

9) أوجد القيمة التقريبية للمقدار $\frac{1}{\sqrt[3]{8.02}}$ باستخدام التفاضل.

10) باستخدام التفاضل، أوجد تقريباً للمقدار $\tan\left(\frac{11\pi}{4}+0.05\right)$.

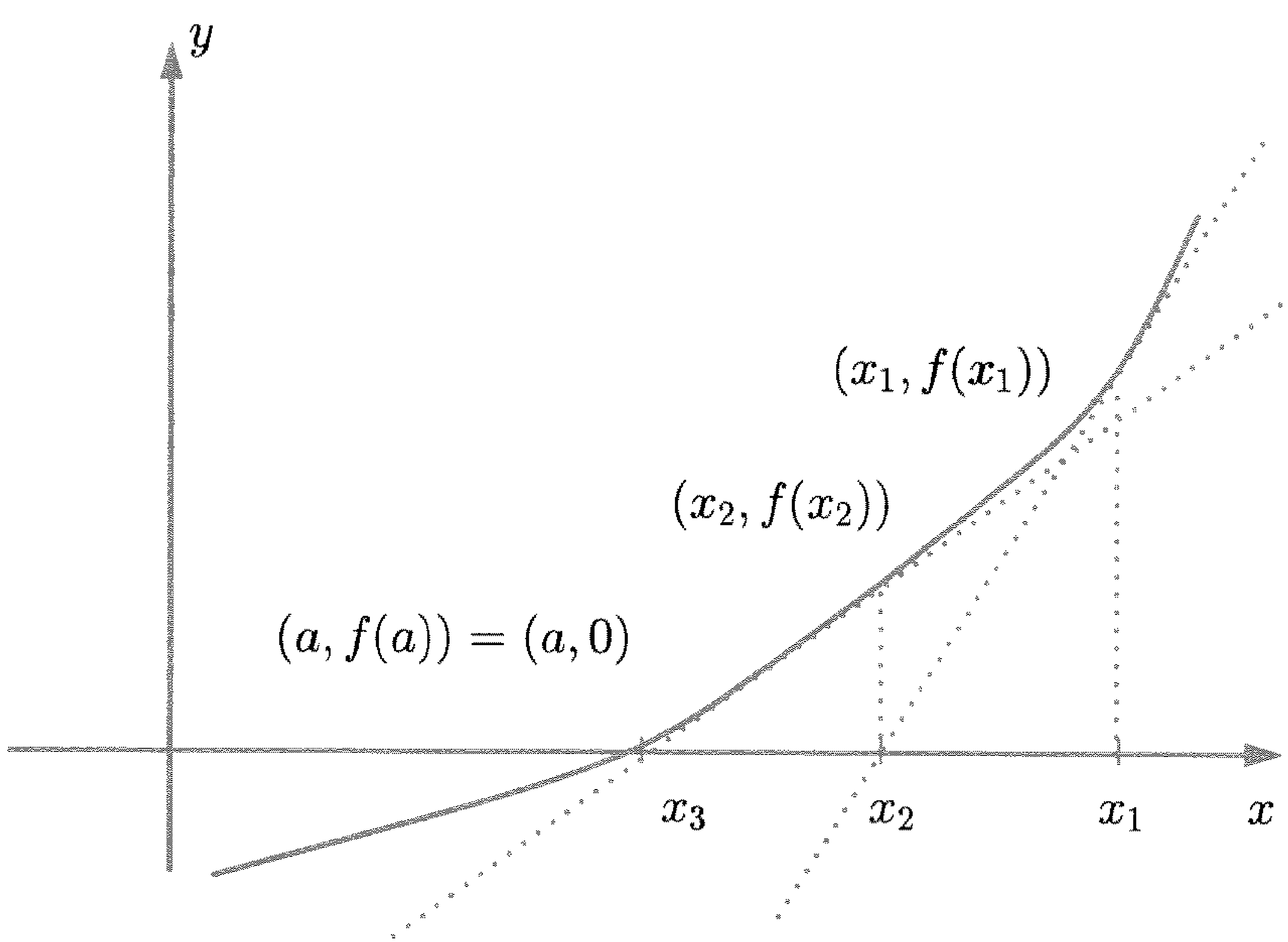
8.5 طريقة نيوتن (Newton's Method)

تصف لنا طريقة نيوتن هذه تقريباً لجذر حقيقي للدالة القابلة للتفاضل f (نعني بالجذر الحقيقي a للدالة f أن $f(a)=0$).

نبدأ أولاً بأي تقريب، وليكن x_1 إلى الجذر a.

حيث أن الجذر a هو تقاطع رسم الدالة مع محور السينات، فإنه يمكن التخمين عن x_1 بحيث يكون قريباً من a.

نرسم المماس للدالة f عند النقطة $(x_1, f(x_1))$، الذي يقطع محور السينات في نقطة أخرى x_2، التي تكون أقرب إلى الجذر a.



الشكل 9.5

من معادلة المماس: $y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$

وبالتعويض عن $y = 0$ عند نقطة التقاطع $(x_2, 0)$، ومراعاة أن $f(x_1) \neq 0$، فإن:

$$0 - f(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

ومن ذلك نجد أن:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

وبالطريقة نفسها، نجد تقريباً آخر أقرب إلى a:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

إذا كانت f قابلة للاشتقاق، ولنفرض أن a جذر حقيقي للدالة f.

إذا كان x_n هو تقريب للجذر a، فإن التقريب التالي هو:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

بشرط أن $f'(x_n) \neq 0$.

مثـــال 16

أوجد تقريباً لـ $\sqrt{2}$ بطريقة نيوتن.

الحـــل

نحاول أن نجد $x = \sqrt{2}$ أو $x^2 = 2$ أو $x^2 - 2 = 0$

$$f(x) = x^2 - 2$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x^2 - 2}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$$

نأخذ $x_1 = 1.5$ فنجد أن $x_2 = x_{1+1} = 1.141666667$

ثم نأخذ x_2 فنجد أن $x_3 = 1.414215686$

ثم نأخذ x_3 فنجد أن $x_4 = 1.414213562$

ثم نأخذ x_4 فنجد أن $x_5 = 1.414213562$

تمارين 8.5

في التمارين من 1 إلى 5 استخدم طريقة نيوتن لحل المعادلات التالية :

(1 $15x^5+13x^3=1$ (2 $x=\dfrac{\sin x}{x}$.

(3 $x^5+x=17$ (4 $x^3+x=3-\sin x$

(5 $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2=\dfrac{1}{2}$

تمارين الفصل الخامس

في التمارين من 1 إلى 4، أوجد الأعداد c في الفترة المذكورة، التي تحقق نظرية القيمة الوسطى.

1) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ ، $[0,2]$.

2) $f(x) = \sqrt[5]{x}$ ، $[-32,1]$.

3) $f(x) = \dfrac{x-4}{x+4}$ ، $[0,4]$.

4) $f(x) = x + \sin^2 x$ ، $[0,2\pi]$.

في التمارين من 5 إلى 9، أوضح لماذا لا تطبق نظرية رول على الدالة المعطاة في الفترة المذكورة.

5) $f(x) = 1 - |x|$ ، $[-1,1]$.

6) $f(x) = |x-1| - 2$ ، $[-1,3]$.

7) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ، $[-1,1]$.

8) $f(x) = 1 - (x-2)^{2/3}$ ، $[1,3]$.

9) $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & ; \quad x < 1 \\ 5 - 2x & ; \quad x \geq 1 \end{cases}$ ، $[-2, 5/2]$.

في التمارين من 10 إلى 14، حدد الفترات التي تكون عليها الدالة المعطاة تزايدية، والفترات التي تكون عليها الدالة نفسها تناقصية.

10) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$.

11) $g(x) = x^3 + \dfrac{4}{x}$.

12) $f(x) = \dfrac{x}{2} - \sin x$ حيث $0 \leq x \leq 4\pi$.

13) $g(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 3$.

14) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & ; \quad x < 0 \\ (x^2-1)^2 & ; \quad 0 \le x \le 2 \\ \dfrac{1}{x^3} & ; \quad x > 2 \end{cases}$.

في التمارين من 15 إلى 19، استخدم اختبار المشتقة الأولى لإيجاد القيم القصوى للدالة المعطاة.

15) $f(x) = x^3 - x^2 + 1$

16) $g(x) = x^2 - x^{-2}$

17) $f(x) = (x-3)^2(x+1)^2$

18) $g(x) = x\sqrt{x-1}$

19) $f(x) = \dfrac{16}{x^2+4}$

في التمارين من 20 إلى 24، أوجد نقط الانقلاب لبيان الدالة المعطاة، وناقش تقعّر بيان الدالة نفسها.

20) $f(x) = x^3 - 8x$

21) $f(x) = x + \tan x$

22) $g(x) = \dfrac{2x}{(x+3)^2}$

23) $g(x) = \dfrac{3x}{x^2-9}$.

24) $g(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$

في التمارين من 25 إلى 29، أوجد القيم القصوى للدالة المعطاة على الفترة المغلقة المذكورة.

25) $f(x) = (x-1)^3$ على $[-1,2]$.

26) $g(x) = (x^2+x)^{\frac{2}{3}}$ على $[-2,3]$.

27) $f(x) = \sin^2 x + \cos x$ على $[-\pi,\pi]$.

28) $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ على $[-3,0]$.

29) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+4}$ على $[-1,1]$.

في التمارين من 30 إلى 34، أوجد خطوط التقارب العمودية، وخطوط التقارب الأفقية للدالة المعطاة:

30) $f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)} - \dfrac{1}{x}$

31) $g(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

32) $f(x) = \dfrac{5x}{\sqrt{4x^2+1}}$

33) $g(x) = \dfrac{x^2-3}{x^2-x}$.

34) $f(x) = \tan x$

في التمارين من 35 إلى 48، أعط بياناً للدالة المعطاة في كل حالة:

35) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x^2-1)$

36) $g(x) = 2x^4 - 8x^3$

37) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

38) $g(x) = \dfrac{2x-1}{3x+2}$

39) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$

40) $g(x) = \sin^2\left(\dfrac{x}{3}\right)$

41) $f(x) = -x(x-1)^3$

42) $g(x) = |x^2-4|$

43) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

44) $g(x) = x(x-1)(x-2)$

45) $f(x) = \sin\left(\dfrac{x+1}{2}\right)$

46) $g(x) = \dfrac{x}{x+1}$

47) $f(x) = \sqrt[4]{x}$

48) $g(x) = \sec\ x$

في التمارين من 49 إلى 51، استخدم طريقة نيوتن لحساب:

49) $\sqrt[3]{17}$.

50) جذور المعادلة $\sin x = \dfrac{x}{2}$.

51) جذور المعادلة $x^3 - 6x^2 - 15x + 4 = 0$.

52) أوجد z إذا كانت $(z, f(z))$ نقطة انقلاب لبيان الدالة