جامعة الانبار
كلية علوم الحاسوب وتكنولوجيا المعلومات
قسم أنظمة شبكات الحاسوب

رياضيات ١

Mathematics 1

قوانين اشتقاق الدوال الاسية واللوغارتيمات

Exponential Functions, Logarithm Functions

المرحلة الأولى – الفصل الاول

م.م. عدي عبد هزام

14) $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & ; \quad x < 0 \\ (x^2-1)^2 & ; \quad 0 \le x \le 2 \\ \frac{1}{x^3} & ; \quad x > 2 \end{cases}.$$

في التمارين من 15 إلى 19، استخدم اختبار المشتقة الأولى لإيجاد القيم القصوى للدالة المعطاة.

15) $f(x) = x^3 - x^2 + 1$

16) $g(x) = x^2 - x^{-2}$

17) $f(x) = (x-3)^2(x+1)^2$

18) $g(x) = x\sqrt{x-1}$

19) $f(x) = \dfrac{16}{x^2+4}$

في التمارين من 20 إلى 24، أوجد نقط الانقلاب لبيان الدالة المعطاة، وناقش تقعّر بيان الدالة نفسها.

20) $f(x) = x^3 - 8x$

21) $f(x) = x + \tan x$

22) $g(x) = \dfrac{2x}{(x+3)^2}$

23) $g(x) = \dfrac{3x}{x^2-9}$.

24) $g(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$

في التمارين من 25 إلى 29، أوجد القيم القصوى للدالة المعطاة على الفترة المغلقة المذكورة.

25) $f(x) = (x-1)^3$ على $[-1,2]$.

26) $g(x) = (x^2+x)^{\frac{2}{3}}$ على $[-2,3]$.

27) $f(x) = \sin^2 x + \cos x$ على $[-\pi,\pi]$.

28) $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ على $[-3,0]$.

29) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+4}$ على $[-1,1]$.

في التمارين من 30 إلى 34، أوجد خطوط التقارب العمودية، وخطوط التقارب الأفقية للدالة المعطاة:

(30 $f(x) = \frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{x}$

(31 $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$

(32 $f(x) = \frac{5x}{\sqrt{4x^2+1}}$

(33 $g(x) = \frac{x^2-3}{x^2-x}$.

(34 $f(x) = \tan x$

في التمارين من 35 إلى 48، أعط بياناً للدالة المعطاة في كل حالة:

(35 $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x^2-1)$

(36 $g(x) = 2x^4 - 8x^3$

(37 $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

(38 $g(x) = \frac{2x-1}{3x+2}$

(39 $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$

(40 $g(x) = \sin^2\left(\frac{x}{3}\right)$

(41 $f(x) = -x(x-1)^3$

(42 $g(x) = |x^2-4|$

(43 $f(x) = \sqrt[3]{x}$

(44 $g(x) = x(x-1)(x-2)$

(45 $f(x) = \sin\left(\frac{x+1}{2}\right)$

(46 $g(x) = \frac{x}{x+1}$

(47 $f(x) = \sqrt[4]{x}$

(48 $g(x) = \sec\ x$

في التمارين من 49 إلى 51، استخدم طريقة نيوتن لحساب:

(49 $\sqrt[3]{17}$.

(50 جذور المعادلة $\sin x = \frac{x}{2}$.

(51 جذور المعادلة $x^3 - 6x^2 - 15x + 4 = 0$.

(52 أوجد z إذا كانت $(z, f(z))$ نقطة انقلاب لبيان الدالة

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$$

53) إذا كان لبيان الدالة

$$f(x) = a\sqrt{x} + \frac{b}{\sqrt{x}}$$

نقطة انقلاب عند النقطة $(1,4)$، أوجد كلاً من a,b.

54) إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} -2x & ; \quad x < 1 \\ x-3 & ; \quad 1 \le x \le 4 \\ 5-x & ; \quad x > 4 \end{cases}$$

أوجد أ) النقط الحرجة للدالة f.

ب) نقط النهاية القصوى للدالة f إن وجدت

55) ارسم بيانياً الدالة

$$f(x) = \frac{x}{(3x+1)^2}$$

الفصل السادس

التكامل

Integration

1.6 التكامل غير المحدود (Indefinite Integral)

إذا كانت $f(x)=4x^3$، فإن الدالة $F(x)=x^4$ لها الخاصية وهي أن $F'(x)=4x^3=f(x)$.

لكن الدالة x^4-3 يكون تفاضلها أيضاً $4x^3$، وأكثر من ذلك أي دالة على الشكل x^4+c، (حيث c أي مقدار ثابت) يكون تفاضلها $4x^3$.

إذن إذا كانت $F(x)=x^4+c$، فإن $F'(x)=4x^3=f(x)$. تسمى F العملية العكسية لعملية تفاضل الدالة f، ويطلق عليها اسم التكامل غير المحدود.

تعريف 1.6

إذا كانت f معرّفة على $[a,b]$، وإذا وجدت دالة F، حيث F متصلة على $[a,b]$، وقابلة للاشتقاق على (a,b) و $F'(x)=f(x)$، فإن F تسمى العلاقة العكسية لتفاضل الدالة f أو تكامل f غير المحدود، ويرمز لذلك بالرمز

$$F(x)=\int f(x)dx$$

وتقرأ F هو تكامل الدالة f بالنسبة للمتغير x.

عندما توجد مثل هذه الدالة F، نقول إن الدالة f قابلة للتكامل.

نظرية 1

إذا كانت F وG دالتين قابلتين للاشتقاق ولهما التفاضل نفسه، فإنهما تختلفان بمقدار ثابت فقط.

أي أنه إذا كان $F'(x) = G'(x)$، فإن $F(x) - G(x) = C$.

البرهان

لنفرض أن $H(x) = F(x) - G(x)$

إذن $H'(x) = F'(x) - G'(x) = 0$ لكل x.

ومن ذلك نستنتج أن H دالة ثابتة.

هذا يعني أن $F(x) - G(x) = C$.

قواعد لإيجاد بعض التكاملات

1) إذا كانت $f(x) = x^r$ حيث أن $r \neq -1$، فإن:

$$\int x^r dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C$$

مثال 1

أوجد $\int x^{10} dx$.

الحـل

$$\int x^{10}dx = \frac{1}{10+1}x^{10+1} + C = \frac{1}{11}x^{11} + C$$

مثـال 2

أوجد $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx$.

الحـل

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}dx = \int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C$$

$$= 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C$$

(2 إذا كانت f وg دالتين قابلتين للتكامل، وكان k_1 وk_2 مقدارين ثابتين، فإن:

$$\int [k_1 f(x) + k_2 g(x)]dx = k_1 \int f(x)dx + k_2 \int g(x)dx$$

مثـال 3

أوجد $\int (3x^3 + 2x^2)dx$.

الحـل

$$\int (3x^3 + 2x^2)dx = 3\int x^3dx + 2\int x^2dx = 3\frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3} + C$$
$$= \frac{3}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + C$$

(3 $\int \frac{1}{x}dx = ln|x| + C$ حيث أن C مقدار ثابت.

مثـال 4

أوجد $\int \left(x^2 + \frac{3}{x}\right)$.

الحـل

$$\int \left(x^2 + \frac{3}{x}\right) dx = \int x^2 dx + 3\int \frac{1}{x} dx = \frac{1}{3}x^3 + 3\ln|x| + C$$

تمارين 1.6

أوجد التكاملات الآتية:

1) $\int k dx$ حيث أن k مقدار ثابت.

2) $\int (ax+b)dx$ حيث أن a وb مقداران ثابتان.

3) $\int \frac{4}{x^3} dx$.

4) $\int (\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})dx$.

5) $\int \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx$.

6) $\int \frac{2x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{5}} + x^{\frac{7}{5}}}{x^3} dx$.

7) برهن على أن $\int f(x) - g(x) dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$ عندما تكون f وg دالتين قابلتين للتكامل.

8) أوجد $\int (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)dx$.

9) أعط مثالاً توضح فيه أن:

$$\int f(x).g(x)dx \neq \left(\int f(x)dx\right).\left(\int g(x)dx\right)$$

10) إذا كان $f'(x) = 2x^2 + 2$ والنقطة $(2,0)$ على بيان الدالة f، أوجد $f(x)$.

2.6 التكامل المحدود (The Definite Integration)

لنفرض أن المساحة المحصورة بين منحنى الدالة f ومحور السينات، والمستقيمين $x = a$ و $x = b$ يرمز لها بالرمز A_a^b.

لنفرض أن P هو تجزيء منتظم للفترة $[a, b]$:

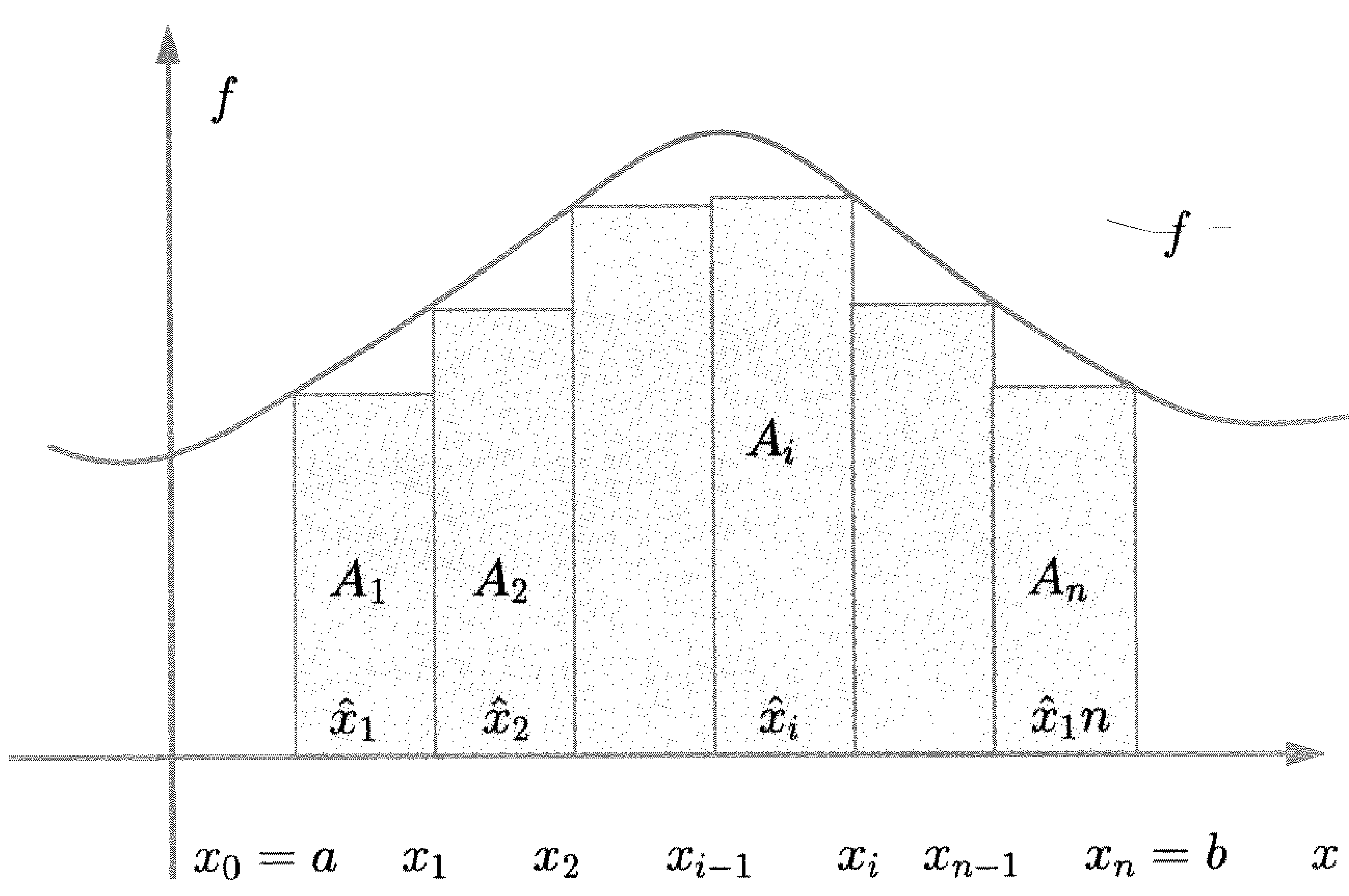
$$P : a = x_1 < x_2 < ... < x_n = b$$

إذن المساحة A_a^b هي تقريباً مجموع مساحة المستطيلات الموضحة بالشكل 1.6 وهي:

$$A_a^b = A_1 + A_2 + ... + A_n = \sum_{i=1}^{n} A_i$$

إذا كان $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$، فإن:

$$A_a^b = f(\hat{x}_1)\Delta x + f(\hat{x}_2)\Delta x + ... + f(\hat{x}_n) = \sum_{i=1}^{n} f(\hat{x}_i)\Delta x$$



الشكل 1.6

تعريف 2.6

إذا كانت f دالة معرّفة على $[a,b]$ و$a<b$، فإن التكامل المحدود على الفترة $[a,b]$ هو:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{max(\Delta i_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\hat{x}_i)\Delta x_i$$

بشرط وجود النهاية.

إذا كانت النهاية موجودة، فإن الدالة f تسمى دالة قابلة للتكامل على $[a,b]$.

نظرية 2

إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a,b]$، فإن الدالة f قابلة للتكامل على الفترة $[a,b]$.

أحد استخدامات التكامل المحدود هو إيجاد المساحة والتعريف التالي يوضح ذلك.

تعريف 3.6

المساحة A_a^b المحصورة بين منحنى الدالة ومحور السينات، والمستقيمين $x=a$ و$x=b$ هي:

$$A_a^b = \int_a^b |f(x)|dx$$

إذا كان $a<b$ و $f(x)\geq 0$ على الفترة $[a,b]$، فإن:

$$A_a^b = \int_a^b |f(x)|dx = \int_a^b f(x)dx$$

خواص التكامل المحدود

1) $$\int_a^b k\,dx = k(b-a)$$

2) إذا كانت f قابلة للتكامل على الفترة $[a,b]$، وكان k عدداً حقيقياً، فإن kf تكون قابلة للتكامل على الفترة $[a,b]$، ويكون:

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

3) إذا كانت f و g دالتين قابلتين للتكامل على الفترة $[a,b]$، فإن $f+g$ و $f-g$ دالتان قابلتان للتكامل على الفترة $[a,b]$، ويكون:

$$\int_a^b (f(x)\pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

4) إذا كان $a<c<b$، وإذا كانت f قابلة للتكامل على الفترتين $[a,c]$ و $[c,b]$، فإن f قابلة للتكامل على الفترة $[a,b]$ ويكون:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

5) إذا كانت f قابلة للتكامل على الفترة $[a,b]$، وإذا كانت $f(x)\geq 0$ لكل $x\in[a,b]$، فإن:

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

6) إذا كانت f و g دالتين قابلتين للتكامل على الفترة $[a,b]$ و $f(x)\geq g(x)$ لكل $x\in[a,b]$، فإن:

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

7) $$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

8) $$\int_a^a f(x)dx = 0$$

نظرية 3 (النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل)

إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a,b]$، وكانت F أي دالة تحقق الشرط $F'(x) = f(x)$ لكل $x \in [a,b]$، فإن:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

مثـــال 5

أوجد المساحة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x) = x^2 - 1$ ومحور السينات والمستقيمين $x = 1$ و$x = 2$.

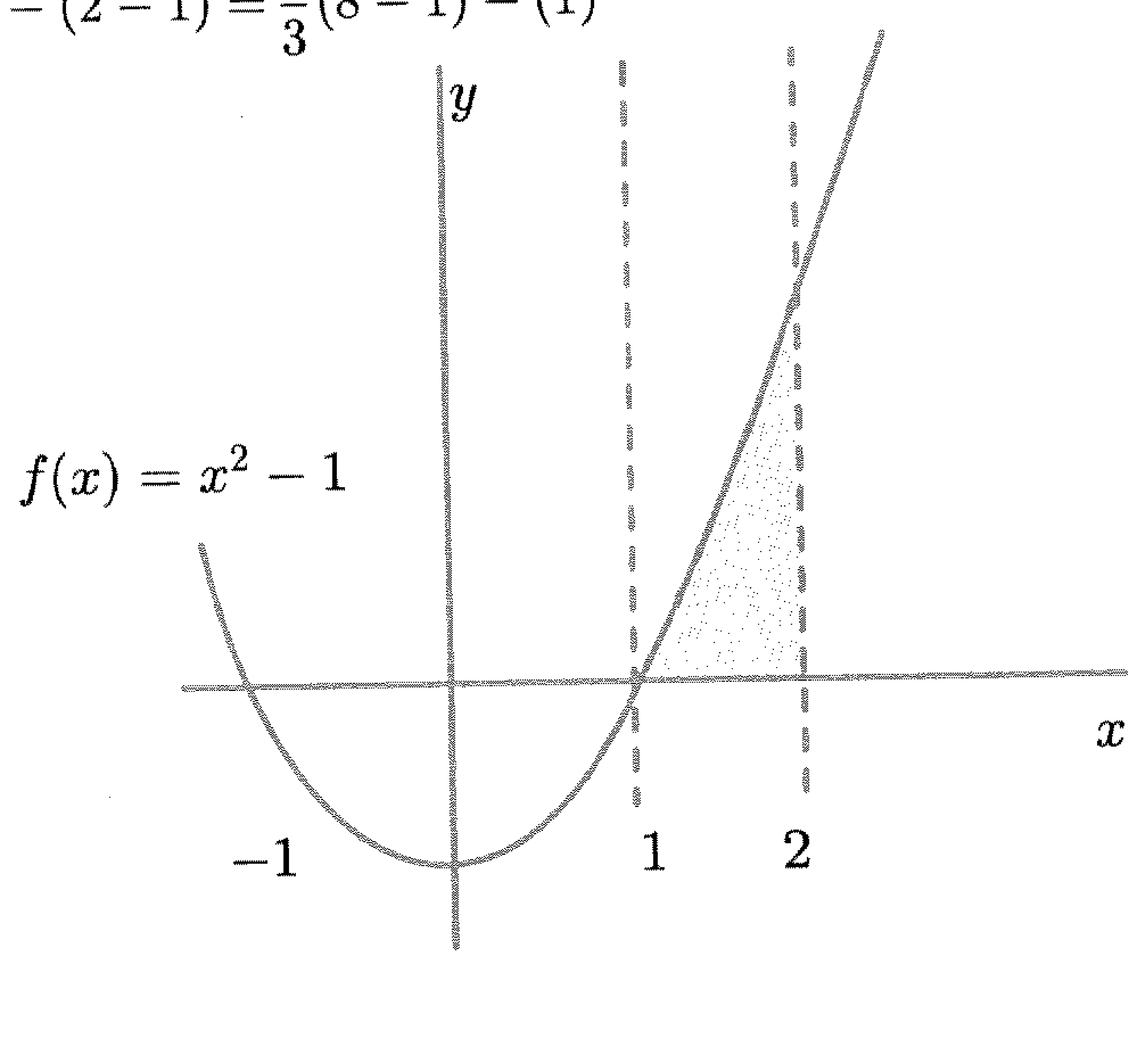
الحـــل

لنفرض أن المساحة المطلوبة، والموضحة في الشكل 2.6، هي A، فإن:

$$\int_1^2 (x^2-1)dx = \int_1^2 x^2dx - \int_1^2 dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_1^2 - x\Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{3}(2^3 - 1^3) - (2-1) = \frac{1}{3}(8-1) - (1)$$

$$= \frac{7}{3} - 1 = \frac{4}{3}$$



الشكل 2.6

مثــال 6

أوجد المساحة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x) = |2x - 1|$، ومحور السينات، والمستقيمين $x = 0$ و$x = 2$.

الحــل

من تعريف الحد المطلق، نجد أن:

$$|2x-1| = \begin{cases} 2x-1 & , \quad x \geq 1/2 \\ -(2x-1) & , \quad x < 1/2 \end{cases}$$

للتوضيح، نبحث عن بيان الدالة $f(x) = |2x - 1|$ (أنظر الشكل 3.6) من البيان نجد أن:

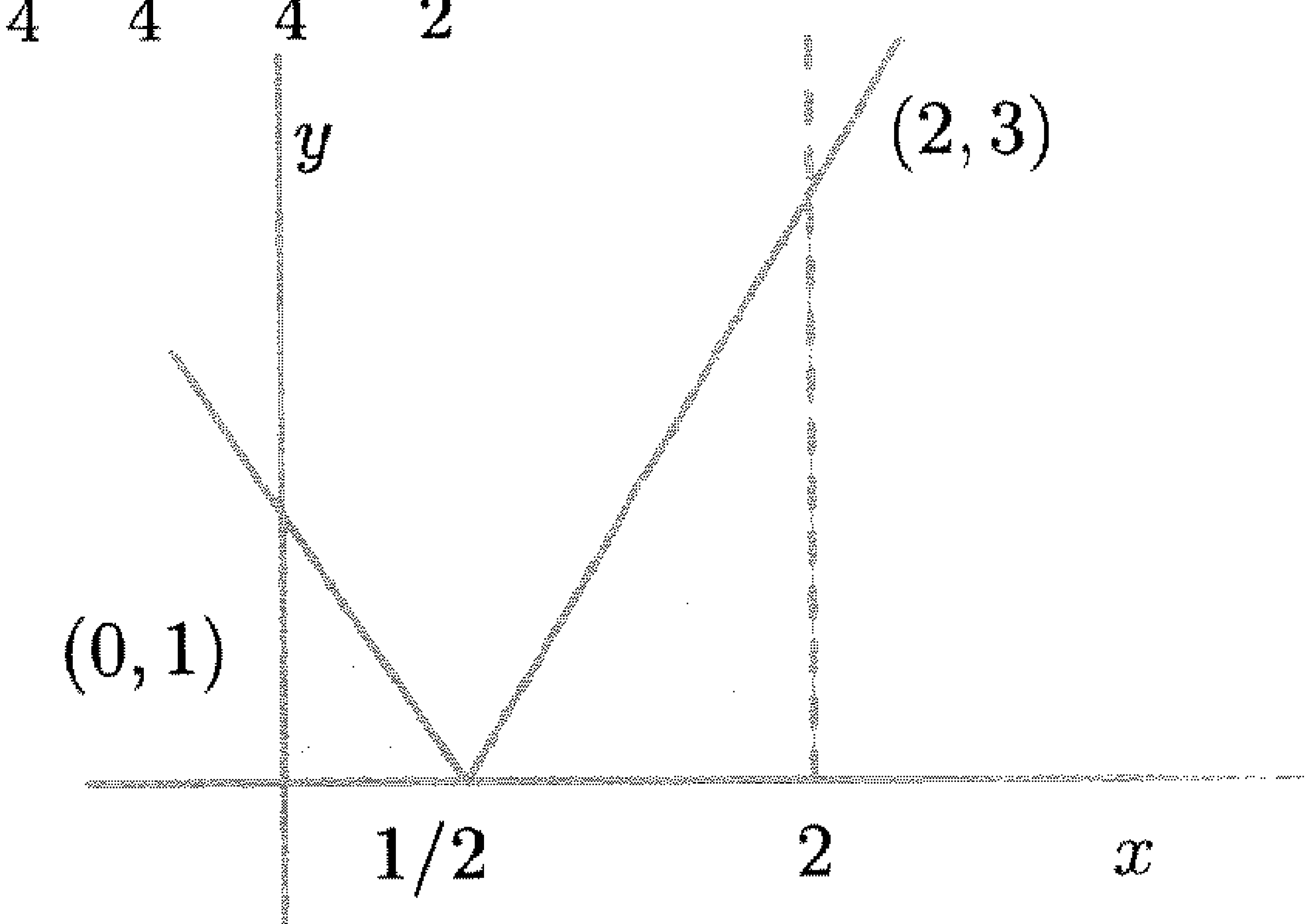
$$\int_0^2 |2x-1|dx = \int_0^{\frac{1}{2}} -(2x-1)dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 (2x-1)dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} (-2x+1)dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 (2x-1)dx$$

$$\int_0^2 |2x-1|dx = (-x^2+x)\Big|_0^{\frac{1}{2}} + (x^2-x)\Big|_{\frac{1}{2}}^2$$

$$= \left[\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right) - (0-0)\right] + \left[(4-2) - \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4} + \left(2+\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$



الشكل 3.6

نظرية 4

إذا كانت الدالة f قابلة للتكامل على $[a,b]$، وإذا كانت:

(أ) f دالة زوجية، فإن: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$

(ب) f دالة فردية، فإن: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

مثـال 7

أوجد $\int_{-2}^{2} x^2 dx$.

الحـل

حيث أن الدالة $f(x) = x^2$ دالة زوجية، فإن:

$$\int_{-2}^{2} x^2 dx = 2\int_{0}^{2} x^2 dx = 2\left(\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^2 = 2\left[\frac{1}{3}2^3 - \frac{1}{3}0^2\right] = \frac{16}{3}$$

مثـال 8

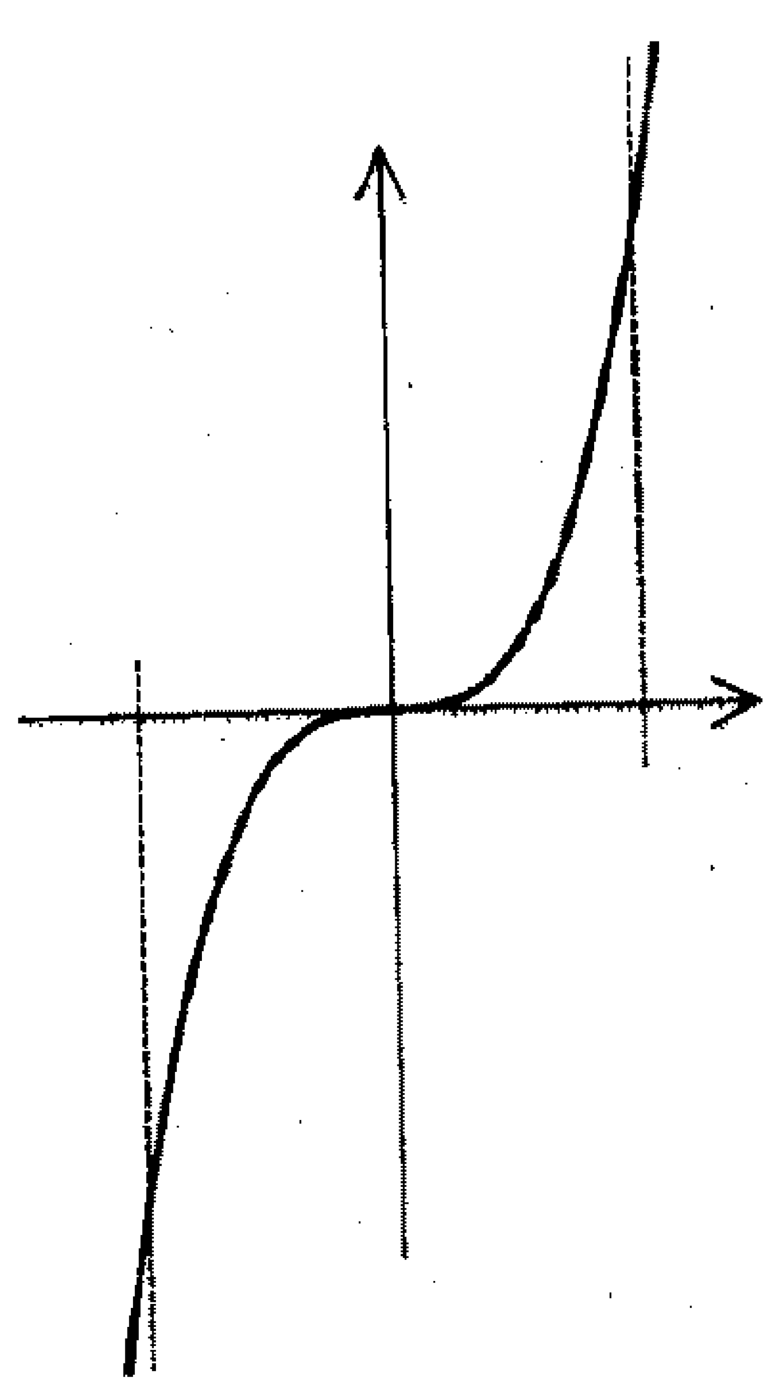
أوجد $\int_{-2}^{2} x^3 dx$.

الحـل

حيث أن الدالة $f(x) = x^3$ دالة فردية، فإن:

$$\int_{-2}^{2} x^3 dx = 0$$

السبب في أن ناتج التكامل يساوي صفراً هو أن نصف المساحة تقع تحت محور السينات، ونصفها الآخر فوق محور السينات، كما هو موضّح في الشكل 4.6.



شكل 4.6

مثـــال 9

أوجد $\int_{-1}^{1}(x-x^3)dx$

الحـــل

حيث أن الدالة $f(x)=x-x^3$ دالة فردية، فإن:

$$\int_{-1}^{1}(x-x^3)dx=0$$

مثـــال 10

أوجد المساحة المحصورة بين المنحنى $y=x^2+3x$ ومحور السينات.

الحـــل

الدالة $f(x)=x^2+3x$ ليست دالة زوجية، وليست دالة فردية.

نحاول إيجاد نقط التقاطع مع محور السينات، وذلك بوضع $y=0$.

$$x^2+3x=0$$

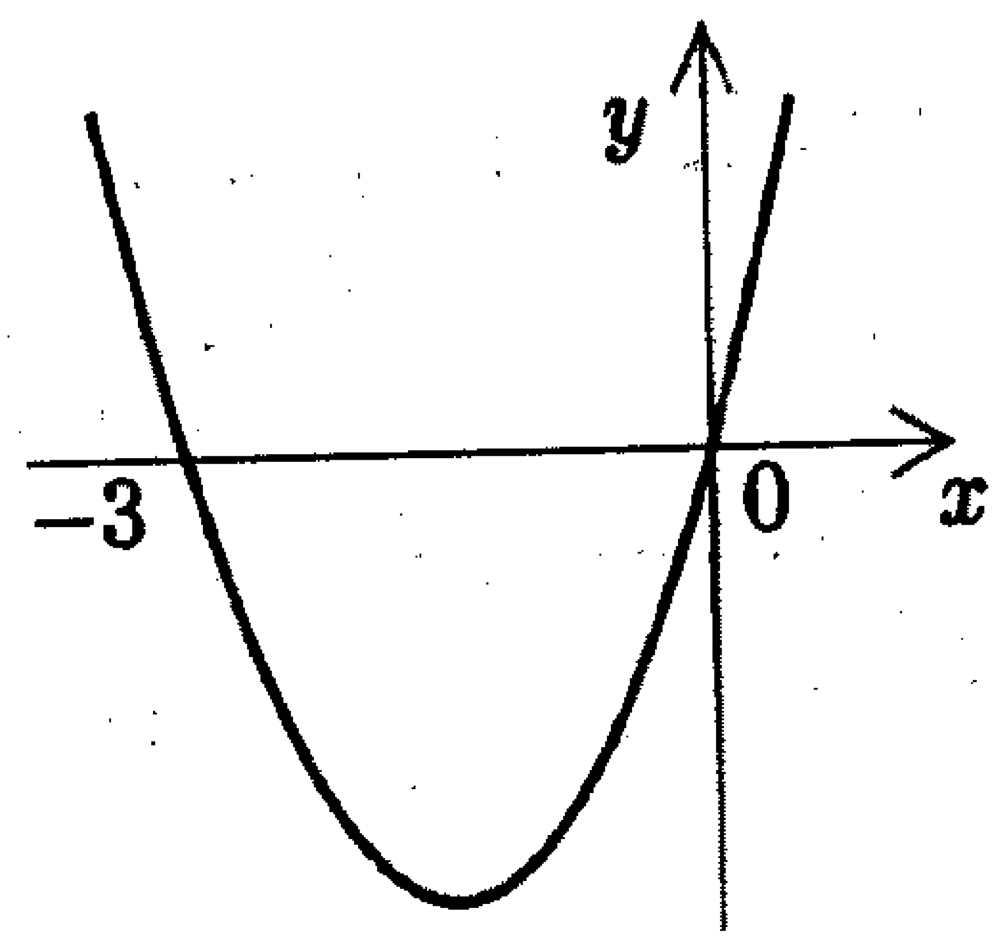
$$x(x-3)=0$$

وهذا يؤدي إلى أن $x=0$ أو $x=-3$

ومن ذلك نجد أن المساحة المطلوبة هي:

$$\begin{aligned}\int_{-3}^{0}(x^2+3x)dx &= -\int_{0}^{-3}(x^2+3x)dx\\ &= -\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right)\Big|_0^{-3}\\ &= -\left[\left(-\frac{27}{3}+\frac{27}{2}\right)-(0+0)\right]\\ &= -\frac{27}{3}=-\frac{9}{2}\end{aligned}$$

الإشارة السالبة هنا تدل على أن المساحة المطلوبة تقع تحت محور السينات.



شكل 5.6

نظرية 5

إذا كانت الدالة $m \le f(x) \le M$ لكل $x \in [a,b]$، فإن:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

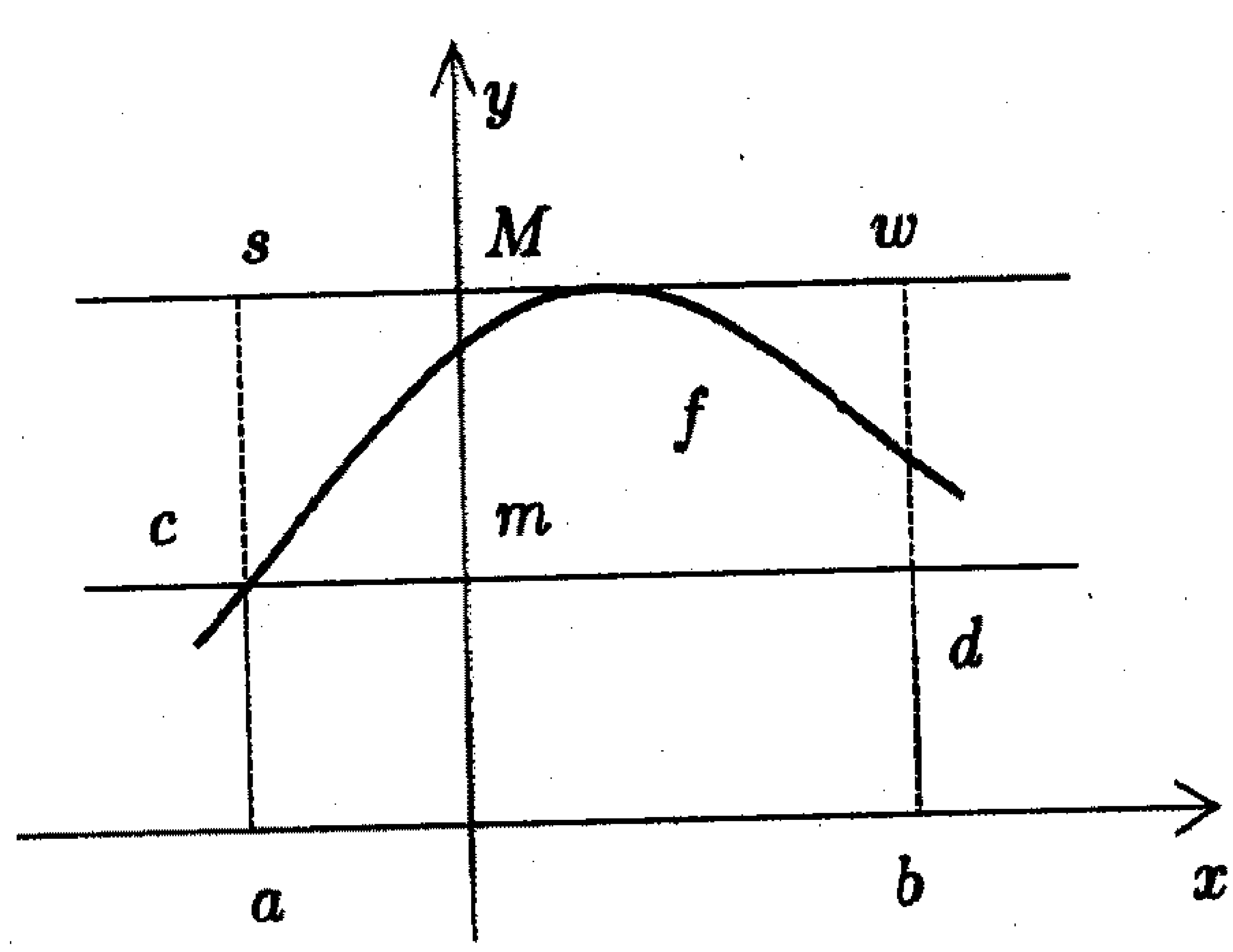
البرهان

$m \le f(x) \le M$ لكل $x \in [a,b]$.

بأخذ التكامل من a إلى b، نجد أن:

$$\int_a^b mdx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b Mdx$$

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$



الشكل 6.6

لاحظ أن $\int_a^b m dx$ هو مساحة المستطيل $acdb$، وأن $\int_a^b M dx$ هو مساحة المستطيل $aswb$.

ولكن $\int_a^b f(x)dx$ هو المساحة المحصورة بين منحنى الدالة f، ومحور السينات، والمستقيمين $x = a$ وص= b

مثـال 11

أوجد تقديراً للتكامل $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^5 x dx$

الحـل

بما أن $0 = \sin 0 \leq \sin\ x \leq \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ عندما تكون $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$

إذن $0 \leq \sin x \leq \frac{1}{2}$

وبذلك فإن $0 \leq \sin^5 x \leq \frac{1}{32}$

إذن $m = 0$ و $M = 1/32$

ويكون $0 \leq \int_0^{\pi/6} \sin^5 x dx \leq \frac{1}{32}(\frac{\pi}{6} - 0) = \frac{\pi}{192}$

تعريف 4.6 (الاتصال المقطعي) (Piecewise Continuity)

الدالة f متصلة مقطعياً على الفترة $[a, b]$، إذا كانت متصلة عند كل نقطة في الفترة $[a, b]$، ما عدا عدد نهائي من النقط التي تكون الدالة عندها منقطعة بقفز.

على سبيل المثال الدالة $f(x) = [x]$، أنظر الشكل 4.2 في الفصل الثاني.

نظرية 6

إذا كانت f متصلة مقطعياً على $[a, b]$، فإن $\int_a^b f(x)dx$ يكون موجوداً.