جامعة الانبار
كلية علوم الحاسوب وتكنولوجيا المعلومات
قسم أنظمة شبكات الحاسوب

رياضيات ١

Mathematics 1

قوانين اشتقاق معكوس الدوال المثلثية

Inverse Sine, Inverse cosine, Inverse tangent, Alternate Notation

المرحلة الأولى – الفصل الاول

م.م. عدي عبد هزام

تمارين 2.6

في التمارين من 1 إلى 14، استخدم خواص التكامل لحساب التكامل المعطى.

1) $\int_{2}^{2} 3dx$

2) $\int_{-1}^{4} (-x)dx$

3) $\int_{-\pi}^{\pi} 2dx$

4) $\int_{-2}^{2} (2x+1)dx$

5) $\int_{2}^{2} (x+x^2)dx$

6) $\int_{2}^{0} \frac{x^2-5}{x-5}$

7) $\int_{-2}^{1} |x|dx$

8) $\int_{-2}^{2} |x^3|dx$

9) $\int_{0}^{\pi/2} (3\cos\ x - 2\sin\ x)$

10) $\int_{0}^{1} (x^2+2)^2 dx$

11) $\int_{2}^{2} xdx$

12) $\int_{0}^{3} |3-x^2|dx$

13) $\int_{-2}^{1} x^{4/5}dx$

14) $\int_{-2}^{3} f(x)dx$ عندما تكون
$$f(x) = \begin{cases} 1-x & , \quad -2 \le x \le 0 \\ 1+x & , \quad 0 < x \le 3 \end{cases}$$

15) إذا كانت f دالة متصلة على $[a,b]$، برهن على أن:
$$\left|\int_{a}^{b} f(x)dx\right| \le \int_{a}^{b} |f(x)|dx$$

16) إذا كان n عدداً صحيحاً موجباً، برهن على أن $\int_{0}^{n} [x]dx = \frac{n(n+1)}{2}$

في التمارين من 17 إلى 24، أوجد المساحة المحصورة بين المنحنى المعطى ومحور السينات والمستقيمات المعطاة.

17) $f(x) = 4 - x^2$، محور السينات.

18) $f(x) = x^4$ ، $x = -2$ ، $x = 4$، محور السينات.

19) $y = x^3 + -x^2 - x - 2$ ، محور السينات.

20) $y = 2\sin x$ ، $x = \pi/3$ د $x = -\pi/3$ ، محور السينات.

21) $y = x^2 - 15x - 34$ ، محور السينات.

22) $y = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$ ، محور السينات.

23) $y = |x|$ ، $x = 1$ ، $x = -1$.

24) $y = |x - 1|$ ، $x = 0$ ، $x = 4$.

25) $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ ، $x = 0$ ، $x = 2$.

3.6 المساحة بين المنحنيات

إذا كانت f وg دالتين، حيث $f(x) \geq g(x)$ لكل $x \in [a,b]$، فإن المساحة المحصورة بين منحني الدالتين f وg، والمستقيمين $x = a$ و$x = b$ هي:

$$\text{المساحة} = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

مثال 12

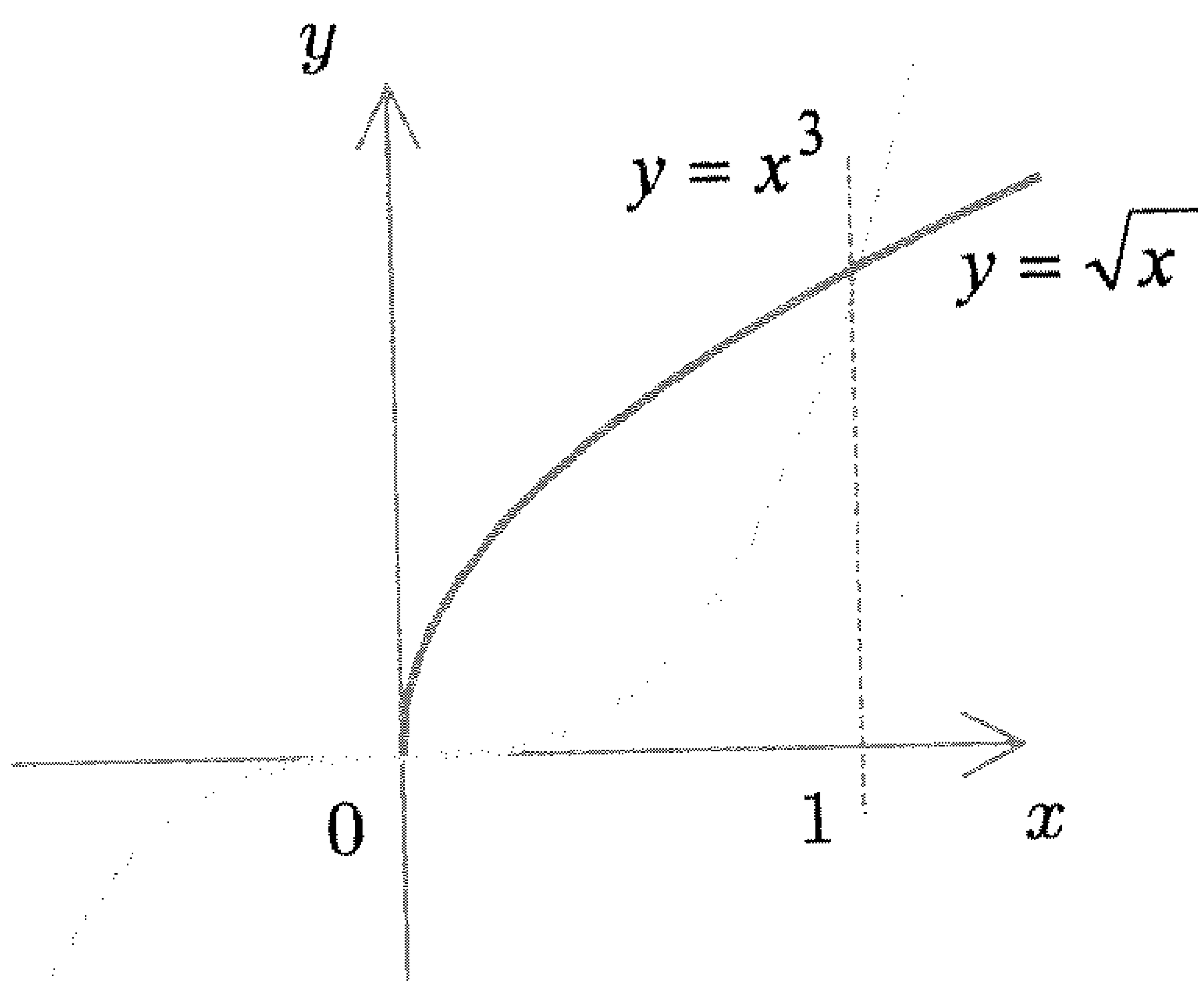
أوجد المساحة المحصورة بين منحني الدالتين $y = \sqrt{x}, y = x^3$.

الحل

حيث أن $y = \sqrt{x}, y = x^3$ ، فإن $\sqrt{x} = x^3$ أو $x^6 = x$

ومنها $x(x^5 - 1) = 0$ أو $x = 0$ ، $x = 1$

نلاحظ أن $\sqrt{x} \geq x^3$ على الفترة $[0,1]$.



الشكل 7.6

إذن المساحة المطلوبة هي:

$$\int_0^1 [\sqrt{x} - x^3]dx = \int_0^1 \left[x^{1/2} - x^3\right]dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{4}x^4\right]\Bigg|_0^2$$

$$= \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{1}{4}x^4\right]\Bigg|_0^1 = \left[\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right] - [0-0]$$

$$= \frac{8-3}{12} = \frac{5}{12}$$

مثـــال 13

أوجد المساحة المحصورة بين منحنيي الدالتين

$$y = x^2 + 3x + 5 \text{ و } y = -x^2 + 5x + 9$$

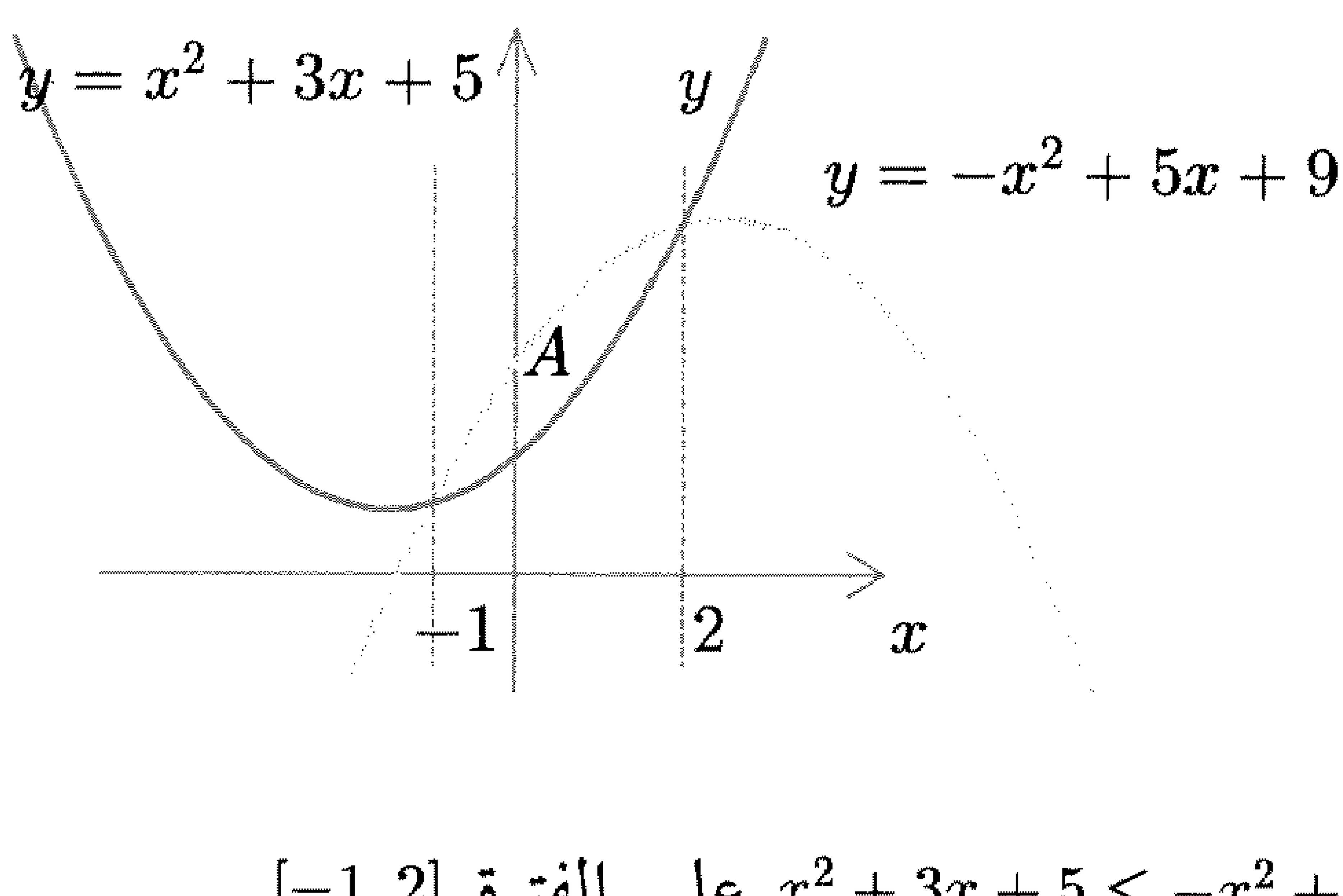
الحــل

حيث أن $y = x^2 + 3x + 5$ و $y = -x^2 + 5x + 9$، فإن:

$$x^2 + 3x + 5 = -x^2 + 5x + 9$$

ومن ذلك $2x^2 - 2x + 4 = 0$ أو $x^2 - x + 2 = 0$

ومنها $(x-2)(x+1) = 0$ وهذا يؤدي إلى أن $x = -1$ أو $x = 2$



الشكل 8.6

من الرسم نلاحظ أن $x^2 + 3x + 5 \leq -x^2 + 5x + 9$ على الفترة $[-1, 2]$

إذن المساحة المطلوبة هي:

$$A = \int_{-1}^{2} \left[(-x^2 + 5x + 9) - (x^2 + 3x + 5)\right] dx$$

$$A = \left[-\frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{2}x^2 + 4x\right]\Bigg|_{-1}^{2} = \left[-\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x\right]\Bigg|_{-1}^{2}$$

$$= \left[\frac{16}{3} + 4 + 8\right] - \left[\frac{2}{3} + 1 - 4\right] = \frac{20}{3} + \frac{7}{3} = \frac{27}{3} = 9$$

مثال 14

أوجد المساحة المحصورة بين منحنيي الدالتين

$y = x^2 + 3x + 5$ و $y = -x^2 + 5x + 9$ من $x = -1$ إلى $x = 4$.

الحل

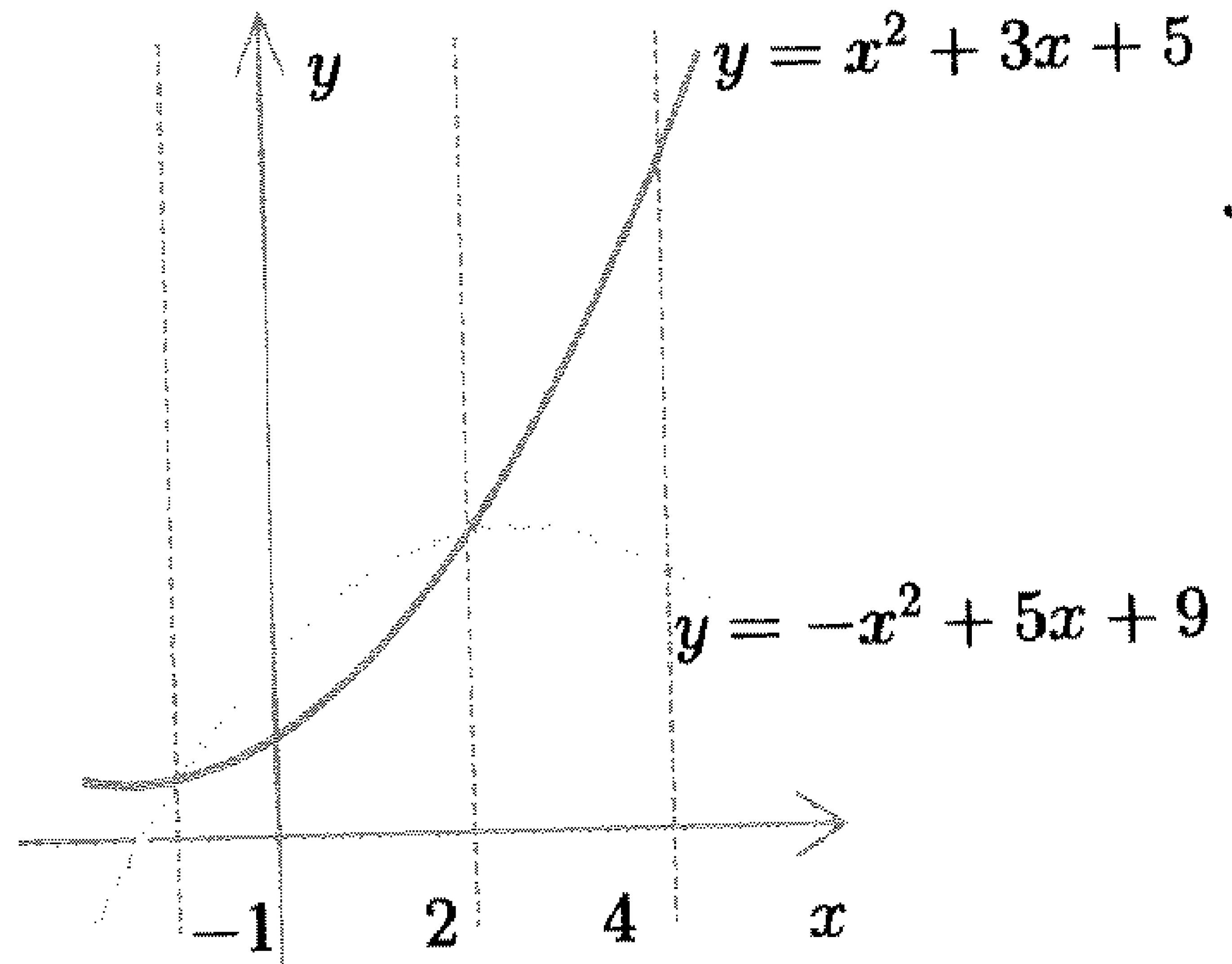
من الشكل 9.6 نلاحظ أن المساحة المطلوبة هي:

$$\int_{-1}^{2} \left[(-x^2 + 5x + 9) - (x^2 + 3x + 5)\right] dx$$

$$+ \int_{2}^{4} \left[(x^2 + 3x + 5) - (-x^2 + 5x + 9)\right] dx$$

وجدنا التكامل الأول في المثال السابق، ويساوي 9.

الآن نلاحظ من الرسم أن $x^2 + 3x + 5 \geq -x^2 + 5x + 9$ على الفترة $[2, 4]$ ولهذا فإن:



$$\int_{-1}^{2} [(x^2 + 3x + 5) - (-x^2 + 5x + 9)] dx$$

$$= \int_{-1}^{2} [2x^2 - 2x - 4] dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x\right]\Bigg|_{-1}^{2} = \frac{52}{3}$$

الشكل 9.6

إذن المساحة المطلوبة هي:

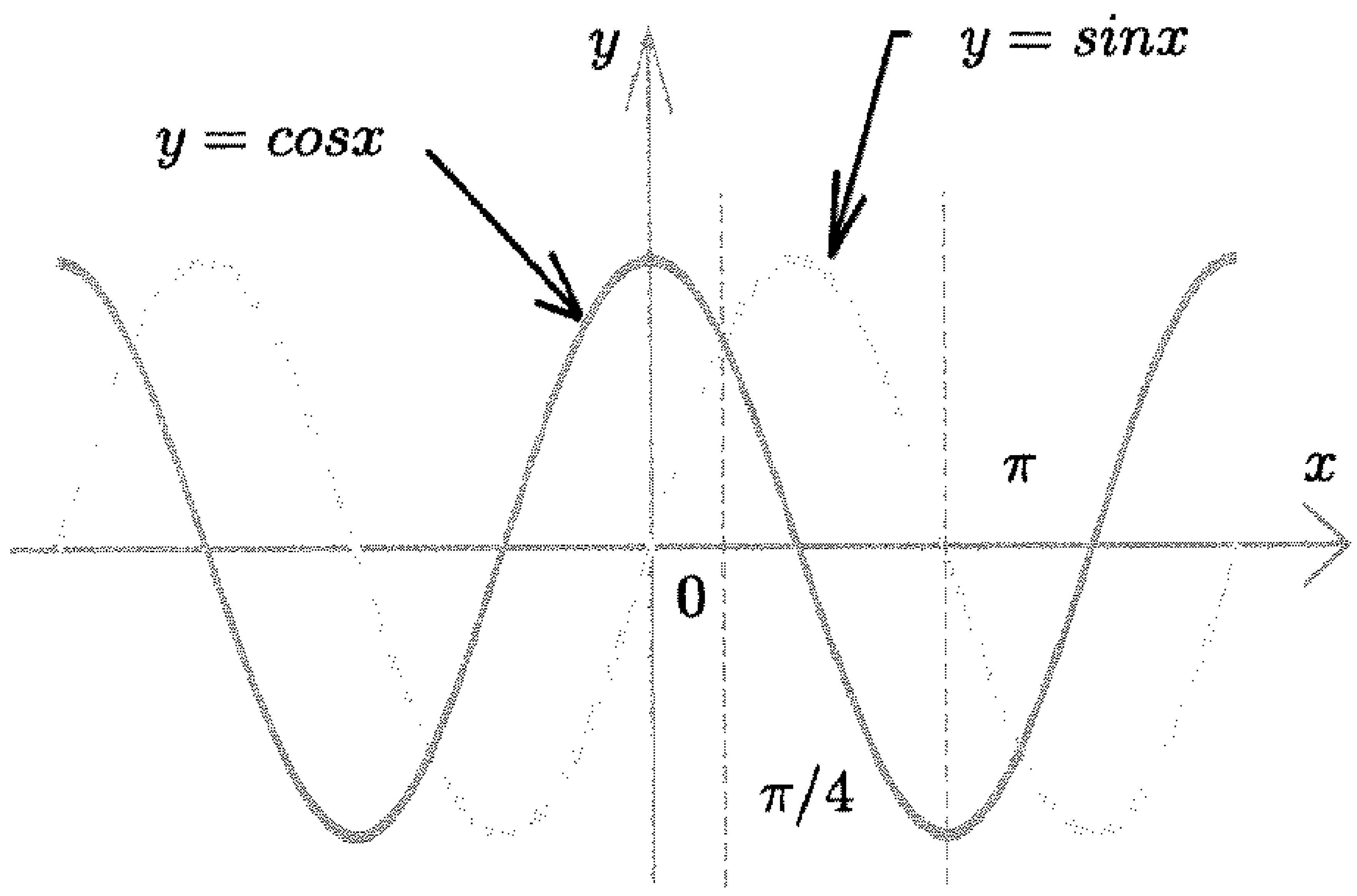
$$\frac{52}{3}+9=\frac{79}{3}$$

مثال 15

أوجد المساحة المحصورة بين منحني الدالتين

$$y=\sin x \text{ و } y=\cos x \text{ و } x=0 \text{ و } x=\pi$$

الحل



الشكل 10.6

نلاحظ من البيان أن $\cos\ x \geq \sin\ x$ على الفترة $[0,\pi/4]$، وأن $\cos x < \sin x$ على الفترة $[\pi/4,\pi]$.

إذن المساحة المطلوبة هي:

$$\int_0^{\pi/4}[\cos\ x-\sin\ x]dx+\int_{\pi/4}^{\pi}[\sin\ x-\cos\ x]dx$$

$$=[\sin\ x+\cos\ x]\Big|_0^{\pi/4}+[-\cos x-\sin x]\Big|_{\pi/4}^{\pi}$$

$$=\left[\left(\sin\ \frac{\pi}{4}+\cos\ \frac{\pi}{4}\right)-(\sin 0+\cos 0)\right]$$

$$+\left[(-\cos\pi-\sin\pi)-\left(-\cos\ \frac{\pi}{4}-\sin\ \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-1+1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}$$

مثـــال 16

أوجد المساحة المحصورة بين منحنيي الدالتين

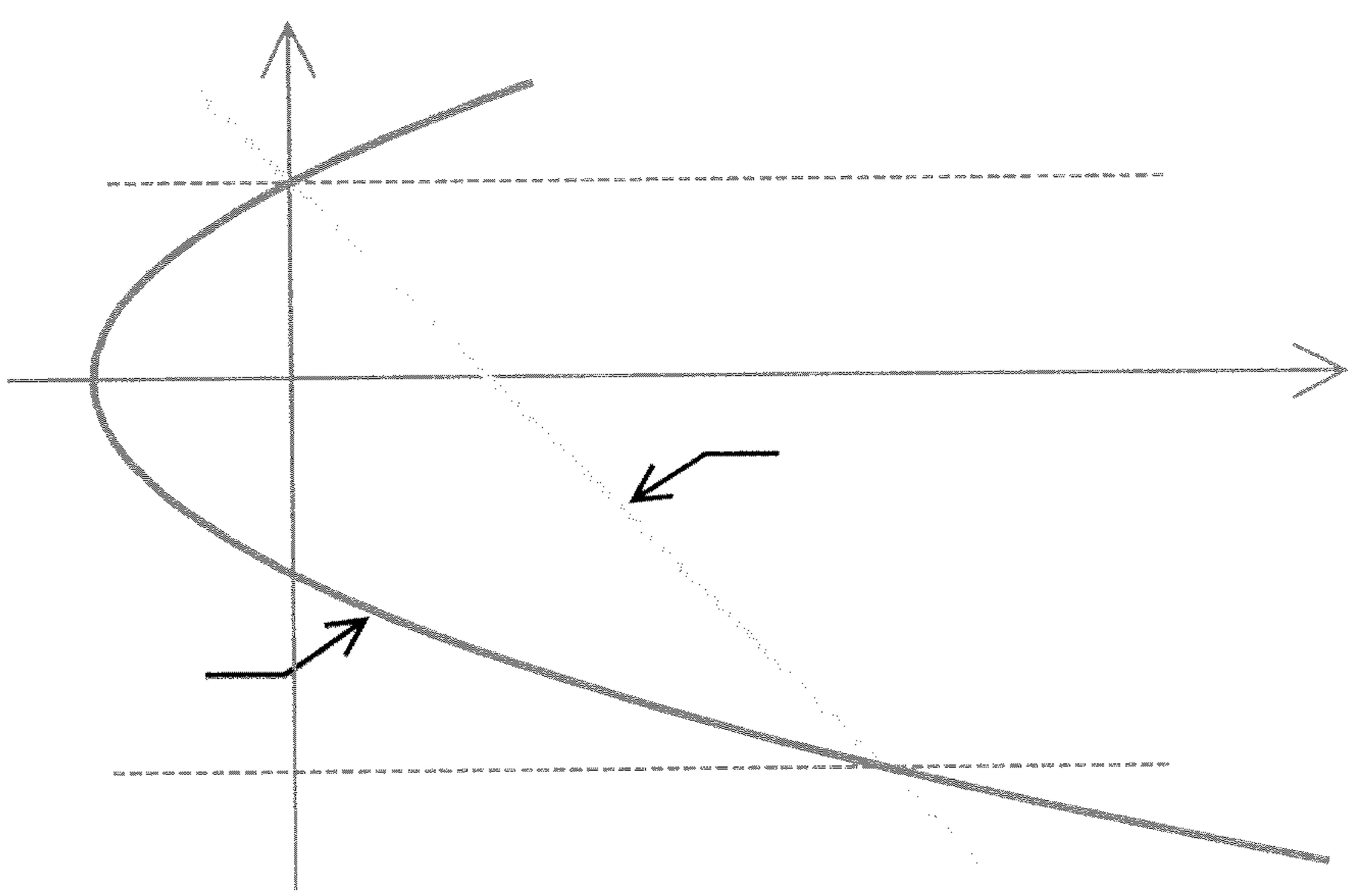
$$y^2 = 4 + x \text{ و } x + 2y = 4$$

الحـــل

$$x = y^2 - 4 \text{ و } x = 4 - 2y$$

بحل المعادلتين، نجد أن:

$$y^2 - 4 = 4 - 2y$$
$$y^2 + 2y - 8 = 0$$
$$(y-2)(y+4) = 0$$
$$y = 2 \text{ أو } y = -4$$



الشكل 11.6

المساحة المطلوبة هي:

$$\int_{-4}^{2}[(4-2y)-(y^2-4)]dy = \int_{-4}^{2}[8-2y-y^2]dy$$
$$= [8y - y^2 - \frac{1}{3}y^3]\Big|_{-4}^{2}$$
$$= \left[16 - 4 - \frac{8}{3}\right] - \left[-32 - 16 + \frac{64}{3}\right]$$
$$= \frac{28}{3} + \frac{80}{3} = \frac{108}{3}$$
$$= 36$$

تكامل بعض الدوال المثلثية:

عرفنا أن:

1) $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$ ، ومن ذلك نجد أن

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

2) $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$ ، ومن ذلك نجد أن

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

3) $\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$ ، ومن ذلك نجد أن

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + C$$

4) $\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$ ، ومن ذلك نجد أن

$$\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$$

5) $\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$ ، ومن ذلك نجد أن

$$\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$$

6) $\frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x$ ، ومن ذلك نجد أن

$$\int \csc x \cot x dx = -\csc + C$$

حيث إن C مقدار ثابت في كل حالة من الحالات السابقة.

تمارين 3.6

في التمارين التالية، أرسم المعادلتين، وأوجد نقاط تقاطعهما، ثم احسب المساحة المحصورة بين بيان المنحنيين.

1) $g(x) = 2x + \frac{5}{4}, f(x) = x^2$.

2) $g(x) = -8, f(x) = -x^2 - 4$.

3) $g(x) = x, f(x) = \sqrt{x}$.

4) $g(x) = x^2, f(x) = -x^2 + 4x$.

6) $g(x) = x, f(x) = (x-2)^2$.

7) $g(x) = x, x + y^2 = 8$.

8) $g(x) = x^2 + x + 1, f(x) = x^3 + x + 1$.

9) $g(x) = x - x^2, f(x) = x^2 - x$.

10) $g(x) = x^3, f(x) = x|x|$.

4.6 التكامل بالتعويض

إذا كان $u = g(x)$ ، ومن ذلك $du = g'(x)dx$ ، فإن:

$$\int_a^b f[g(x)]g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

مثـــال 17

أوجد $$\int_2^5 \frac{1}{5x-1}dx$$

الحـــل

نفرض أن $u = 5x - 1$ وبذلك $du = 5dx$ أو $dx = \frac{1}{5}du$

إذن

$$\int_2^5 \frac{1}{5x-1}dx = \frac{1}{5}\int_9^{24} \frac{du}{u} = \frac{1}{5}\ln u\Big|_9^{24} = \frac{3}{5}\ln |5x-1|\Big|_2^5$$

$$= \frac{1}{5}(\ln 24 - \ln 9) = \frac{1}{5}\ln \frac{24}{9} = \frac{1}{5}\ln \frac{8}{3}$$

مثـــال 18

أوجد $$\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}dx$$

الحـــل

نفرض أن $u = x^2 + 9$ وبذلك فإن $xdx = \frac{1}{2}du$

$$\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{1}{2}\int_9^{25} \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2}\int_9^{25} u^{-1/2}du$$

$$= \frac{1}{2}(2u^{1/2})\Big|_9^{25} = \sqrt{x^2+9}\Big|_0^4$$

$$= \sqrt{2}5 - \sqrt{9} = 5 - 3 = 2$$

مثـــال 19

أوجد $\displaystyle\int \frac{t}{\sqrt{1-2t^2}}dt$

الحـــل

نفرض أن $u = 1 - 2t^2$ ومن ذلك يكون

$$tdt = -\frac{1}{4}du$$

$$\int \frac{t}{\sqrt{1-2t^2}}dt = -\frac{1}{4}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{4}\int u^{-1/2}du$$

$$= -\frac{1}{4}(2u^{1/2}) + C = -\frac{1}{2}(1-2t^2)^{1/2} + C$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{1-2t^2} + C$$

مثـــال 20

أوجد $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{x}+4)^4}{\sqrt{x}}dx$

الحـــل

نفرض أن $u = \sqrt{x} + 4$ أو $u = x^{1/2} + 4$ وبذلك فإن $du = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

ومنه $2du = \dfrac{dx}{\sqrt{x}}$

$$\int \frac{\sqrt{x}+4)^4}{\sqrt{x}}dx = 2\int u^4 du = \frac{2}{5}u^5 + C = \frac{2}{5}(\sqrt{x}+4)^5 + C$$

مثـــال 21

أوجد $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^3}$

الحـــل

نفرض أن $u = \sqrt{x} + 1$ وهذا يعني أن $u = x^{1/2} + 1$ إذن $\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2du$

الآن

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^3}dx = 2\int_2^3 \frac{du}{u^3} = 2\int_2^3 u^{-3}du = 2\Big(\frac{1}{-2}u^{-2}\Big)\Big|_2^3$$

$$= -(\sqrt{x}+1)^{-2}\Big|_1^4 = -\frac{1}{(\sqrt{x}+1)^2}\Big|_1^4$$

$$= -\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{4}\right) = -\left(\frac{4-9}{36}\right) = \frac{5}{36}$$

مثـــال 22

أوجد المساحة تحت المنحنى وفوق محور السينات للدالة

$f(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2}$ من $x = 1$ إلى $x = 2$.

الحـــل

المساحة المطلوبة هي: $\int_1^2 \frac{x}{(x^2+1)^2}dx$

نفرض أن $u = x^2 + 1$ نجد أن $xdx = \frac{1}{2}du$

إذن

$$\int_1^2 \frac{x}{(x^2+2)^2}dx = \frac{1}{2}\int_2^5 \frac{du}{u^2} = \frac{1}{2}\int_2^5 u^{-2}du$$

$$= -\frac{1}{2}u^{-1}\Big|_2^5 = \frac{3}{20}$$

أو يمكن تأجيل حدود التكامل إلى نهاية المسألة كما يلي:

$$\int_1^2 \frac{x}{(x^2+1)^2}dx = -\frac{1}{2}u^{-1}\Big|_2^5 = \frac{1}{2(x^2+1)}\Big|_1^2$$

$$= -\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{4}\right) = -\left(\frac{2-5}{20}\right) = \frac{3}{20}$$

بالإضافة إلى استخدام التكامل لإيجاد المساحة، فإنه يستخدم لإيجاد القيمة المتوسطة للدالة على فترة ما.

تعريف 5.6

إذا كانت f دالة متصلة على الفترة $[a,b]$، فإن القيمة المتوسطة للدالة f على الفترة $[a,b]$ هي: $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

مثـــال 23

أوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = 3x^2 - 2x$ على الفترة $[1,4]$.

الحــل

القيمة المتوسطة للدالة f على $[a,b]$ هي: $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

إذن القيمة المتوسطة للدالة f على $[1,4]$ هي:

$$\frac{1}{4-1}\int_1^4 (3x^2-2x)dx = \frac{1}{3}(x^3-x^2)\Big|_1^4$$

$$= \frac{1}{3}[(64-16)-(1-1)]$$

$$= \frac{48}{3} = 16$$

تمارين 4.6

في التمارين من 1 إلى 10، احسب التكامل المعطى، مستخدماً طريقة التكامل بالتعويض.

1) $\int (4x+5)^4 dx$

2) $\int x\sqrt{x^2+10}\, dx$

3) $\int \cos\,(4x+1)\, dx$

4) $\int (x+2)\sqrt{4x+x^2}\, dx$

5) $\int \sqrt[4]{x^3+1}\, x^5 dx$

6) $\int (x^2-6x+9)^{7/3}(x-3)\, dx$

7) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+4}}\, dx$

8) $\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^3+3x}}$

9) $\int \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

10) $\int (1-x^{3/2})^{5/3}\sqrt{x}\, dx$

في التمارين من 11 إلى 14، احسب المساحة المحصورة بين المنحنيات المعطاة والمستقيمات المعطاة:

11) $y=\frac{x+1}{x^3}$ ومحور السينات و $x=1/3$ و $x=1/2$.

12) $y=\sqrt{x^2+7}$ ومحور السينات ومحور الصادات و $x=3$.

13) $y=2x^2$ و $y=x^2+2x+3$.

14) $y=(1+x^3)\sqrt{4x+x^4}$ ومحور السينات و $x=1$ و $x=3$.

15) إذا كان ميل مماس المنحنى عند أي نقطة هو $\frac{dy}{dx}=x\sqrt{x^2+1}$، أوجد معادلة المنحنى مع العلم أن المنحنى يمر خلال النقطة $(0,1)$.

تمارين على الفصل السادس

أوجد التكاملات الآتية:

1) $\int (3x+1)^5 dx$

2) $\int x(2x^2-3)^8 dx$

3) $\int x^3\sqrt{x^3-1}\, dx$

4) $\int x\sqrt{9-x^2}\, dx$

5) $\int x^2(3-x^3)^2 dx$

6) $\int x(x^2-1)^4 dx$

7) $\int \frac{1}{x^2}\left(1+\frac{1}{x}\right)^3 dx$

8) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

9) $\int \frac{[1+1/x^2]^{3/5}}{x^3}$

في التمارين من 10 إلى 15، احسب المساحة المحصورة بين المنحنيات المعطاة والمستقيمات المعطاة:

10) $y=\sqrt{x+2}$ ومحور السينات ومحور الصادات و$x=7$.

11) $y=\dfrac{1+1/x}{x^2}$ ومحور السينات و $x=1/3$ و $x=1/2$.

12) $y=\cos x^2$ ومحور السينات و $x=0$ و $x=\sqrt{\pi/2}$.

13) $y=x^2$ و $y=x^3$ و $x=3$.

14) $y=x^4+x-81$ و $y=x$.

15) $y=2x^2+3x+5$ و $y=x^2+3x+6$.

في التمارين من 16 إلى 25 استخدم التكامل بالتعويض للحصول على التكامل المعطى.